

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשס"ז, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 22 נקודות. אם צברת יותר מ- 100 נקודות ציונך יהיה 100.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

מס' סטודנט:

שאלה 1:

הוכח: לכל $n \geq m \geq 1$ שלמים קיים:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}$$

שאלה 2:

הוכח כי בכל תצורה של 101 נקודות A_1, \dots, A_{101} בריבוע היחידה $[0,1]^2$ במישור קיימות שלוש נקודות

שווות A_i, A_j, A_k כך ששטחו של המשולש $A_i A_j A_k$ הנוצר על ידן אינו עולה על $\frac{1}{50}$.

שאלה 3:

שישה ילדים יושבים על קרוסלה עם מקומות מסומנים 1 עד 6 כאשר כל ילד יושב עם הפנים לילד מולו (הראשון מול הרביעי וכו'). בכמה אופנים הילדים יכולים להחליף את מקומות הישיבה כך שאף ילד לא ישב מול הילד מולו הוא יושב כעת?

שאלה 4:

סדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ מוגדרת על ידי: $a_0 = 2, a_1 = 8$, ו- $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ לכל $n \geq 2$. מצא נוסחא ישירה לאיבר הכללי a_n של הסדרה.

שאלה 5:

הטבח מכין סלט פרות מהפרות הבאים: תפוחים, תפוזים, אגסים ובננות. בכמה אופנים הוא יוכל להרכיב סלט מ- n פרות בו מספר התפוחים זוגי, מספר התפוזים מתחלק ב-5, מספר האגסים לכל היותר 4, ומספר הבננות הינו 1 או 2?

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשס"ז, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 22 נקודות. אם צברת יותר מ- 100 נקודות ציונדך יהיה 100.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

מס' סטודנט:

שאלה 1:

הוכח: לכל $n \geq 1$ שלם קיים:

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n}{i-1} = \binom{2n}{n-1}$$

שאלה 2:

סטודנט מתכוון לבחינה במשך 13 ימים. הוא זקוק ל-20 שעות הכנה לכל היותר. הסטודנט מחליט ללמוד שעה אחת לפחות במשך כל אחד מ-13 ימי ההכנה. הוכח: קיים רצף של ימים בהם הסטודנט לומד 4 שעות בדיוק.

שאלה 3:

חשב את מספר המספרים השלמים בין 0 לבין 9999 בהם כל אחת מהספרות 2,5,8 מופיעה לפחות פעם אחת.

שאלה 4:

ליאור צועד את צעידת הבוקר שלו כאשר בכל צעד הוא צועד ימינה, שמאלה או קדימה. בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב את מסלול הצעידה של ליאור באורך n צעדים, כאשר ליאור אף פעם לא צועד ימינה מיד אחרי צעד שמאלה, ואף פעם לא צועד שמאלה מיד אחרי צעד ימינה?

שאלה 5:

בכמה אופנים ניתן להרכיב סלסלה של 20 פירות מפירות מ-6 סוגים, כאשר בסלסלה בין 2 ל-6 פירות מכל סוג?

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשס"ח, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 20 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

מס' סטודנט:

שאלה 1:

הוכח: לכל $n \geq m \geq 1$ שלמים קיים:

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

שאלה 2:

תהי A קבוצה של $n + 1$ מספרים שלמים שונים בין 1 ל- $3n$.

הוכח: A מכילה שני איברים a_i, a_j כך ש $n \leq a_i - a_j \leq 2n$.

שאלה 3:

שלושה אנרכיסטים בוחרים גרביים מתוך מגירה עם שלושה זוגות גרביים. בכמה דרכים הם יוכלו לבחור גרביים כך שכל אחד בוחר שתי גרביים ואף אחד לא בוחר בזוג תואם?

שאלה 4:

מדד בורסת ניירות ערך עולה מדי שנה, כאשר בכל שנה העליה הכוללת במהלך השנה כפולה מזו של השנה הקודמת. מצא את ערך המדד אחרי n שנים, כאשר ערכו בסוף השנה הראשונה והשניה הוא 1 ו- 4, בהתאמה.

שאלה 5:

בכמה אופנים ניתן להרכיב סלסלה של 12 פירות מהפירות פסיפלורה, ליצי, מנגו ואַקְמָנִית, כאשר מספר הפירות מכל סוג בסלסלה אינו עולה על 4?

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשס"ח, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 20 נקודות.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

מס' סטודנט:

שאלה 6:

נסמן ב $d(m, n)$ את מספר המסלולים על שריג דו-ממדי המחברים את הנקודה $(0, 0)$ עם הנקודה (m, n) , כאשר כל צעד במסלול הוא צעד ימינה $((x, y) \rightarrow (x + 1, y))$ או צעד למעלה $((x, y) \rightarrow (x, y + 1))$ או צעד באלכסון $((x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1))$. הוכח:

$$d(m, n) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{l} \binom{m+n-k-l}{k+l}$$

שאלה 7:

מרצה מכיר תשע בדיחות ומספר שלוש בדיחות בכל שיעור. הוכח כי בקורס של שלושה עשר שיעורים יהיה זוג בדיחות אשר יסופרו ביחד בשני שיעורים לפחות.

שאלה 8:

שימי מושיב n זוגות ליד שולחן עם מקומות מסומנים ב $1, 2, K, 2n$. נסמן ב $f(n)$ את מספר האופנים להושיב את n הזוגות כאשר אף זוג לא יושב בסמיכות. הוכח:

$$f(n) = \sum_{i=0}^n (-2)^i \binom{n}{i} \binom{2n-i}{i}$$

שאלה 9:

חשב את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $0, 1, 2$ כאשר בסדרה לא מופיעות בסמיכות שתי ספרות זוגיות.

שאלה 10:

גבי אורז את מדיו לתוך מזוודה. בכמה אופנים הוא יכול לארוז את חפציו כאשר הוא שם מכנסיים, חולצות וחגורות, מספר החפצים הכולל במזוודה הוא n , מספר החולצות במזוודה שונה ממספר החגורות ופריטים מאותו סוג נחשבים כזהים?

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשס"ט, מועד א'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/ על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 20 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטייטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

מס' סטודנט:

שאלה 1:

נסמן ב a_n את מספר הסידורים של המספרים $1, 2, \dots, n$ כך שמלבד המספר במקום הראשון כל מספר k רואה משמאלו (לאו דווקא בסמיכות) את המספר $k-1$ או את המספר $k+1$. לדוגמא הסידור 324516 והסידור 435216 עונים על הדרישה ואילו הסידור 325416 אינו עונה על הדרישה.
הוכח: $a_n = 2^{n-1}$.

שאלה 2:

הוכח כי בכל צביעה של משבצות הלוח 4×7 בשני צבעים קיים מלבן שכל ארבע פינותיו צבועות באותו צבע.

שאלה 3:

n סועדים יושבים במסעדת גורמה סביב שולחן עגול. בתפריט המסעדה שתי מנות: רגל קרושה וג'חנון. בכמה אופנים יוכלו הסועדים לבחור את מנותיהם כך שאף שני שכנים לא יבחרו ברגל קרושה?

שאלה 4:

בכמה אופנים ניתן להרכיב מספר בן עשר ספרות בו מופיעות רק ספרות אי-זוגיות, והספרות 1 ו-3 מופיעות מספר חיובי וזוגי של פעמים?

שאלה 5:

יהא G גרף על n קדקדים שבו לכל שני קדקדים לא סמוכים u ו- v קיים $d(u) + d(v) \geq n-1$, כאשר $d(v)$ מסמן את דרגת הקדקד v . הוכח כי G קשיר.

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשס"ט, מועד ב'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה שלוש שעות. לא תינתן הארכת זמן.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 20 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

מס' סטודנט:

שאלה 1:

בכמה אופנים ניתן לפזר 40 כדורים כחולים זהים ו-20 כדורים לבנים זהים לחמישה תאים שונים כך שבכל תא מספר הכדורים הלבנים אינו עולה על זה של הכדורים הכחולים?

שאלה 2:

40 סטודנטים מגישים בקשות למגורים בחדרים זוגיים במעונות. כל סטודנט מרכיב רשימה של 20 סטודנטים אחרים איתם הוא מוכן לגור. הראה כי קיימים שני סטודנטים המוכנים לגור זה עם זה באותו חדר.

שאלה 3:

שימי מסדר את ספריו על מדף. באוסף הספרים שלו יש n כותרים, כאשר מכל כותר יש שני עותקים זהים. מצא נוסחא למספר האופנים לסידור הספרים על המדף, כאשר אין אף שני עותקים של אותו כותר העומדים זה לצד זה.

שאלה 4:

מצא את מספר הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ בשלמים אי-שליליים, כאשר $x_1 = 2x_2 + 2$ וגם $x_3 \leq x_4$.

שאלה 5:

קבוצת קדקדים U בגרף G נקראת בלתי-תלויה אם U לא פורשת אף צלע של G . הוכח: בכל גרף G עם n קדקדים מדרגה מרבית Δ קיימת קבוצה בלתי-תלויה בגודל

$$\frac{n}{\Delta+1}$$
 לפחות.

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשע"ב, מועד א'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות. **לא** תינתן הארכת זמן.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב- **90** נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב- **100** נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

שאלה 1:

יהיו m, n טבעיים המקיימים: $n \geq 2m+1$. הוכיחו:

$$\binom{n}{2m+1} = \sum_{k=m+1}^{n-m} \binom{k-1}{m} \binom{n-k}{m}$$

שאלה 2:

בוריס גלפנד רושם מספרים $1, \dots, 64$ על לוח שח 8×8 . הוכיחו כי קיימות שתי משבצות סמוכות (החולקות צלע) על הלוח אשר הפרש מספריהן הוא לפחות 5.

שאלה 3:

תלמידי הכיתה משתתפים ב-3 קבוצות ספורט כאשר כל זוג תלמידים משתתף ביחד בקבוצה אחת לפחות. הוכיחו כי אחת מ-3 הקבוצות מכילה לפחות $2/3$ מתלמידי הכיתה.

שאלה 4:

מצאו בכמה האופנים יכול נוח להעמיס את תיבתו ב- n בעלי חיים מבין הגיריות, הסוסים, הפילים והקרנפים, כאשר הסוסים עולים רק בזוגות, הגיריות רק בשלושות, לא ניתן להעמיס יותר משני קרנפים, ולא ניתן להעמיס יותר מפיל אחד.

שאלה 5:

נגדיר $f(n)$ להיות המספר המרבי האפשרי של צלעות בגרף לא קשיר על n קדקודים. הוכיחו:

$$f(n) = \binom{n-1}{2}$$

(הראו גם את החסם העליון וגם את החסם התחתון על $f(n)$!)

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר ב' תשע"ב, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות. **לא** תינתן הארכת זמן.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלות מספריות.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!

שאלה 1:

יהיו $n \geq r \geq 1$ שלמים. הוכיחו:

$$\binom{n}{r} 2^r 3^{n-r} = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} 2^k$$

שאלה 2:

תהי A קבוצה של 9 מספרים שלמים חיוביים שונים בה כל מספר אינו מתחלק בראשוני גדול מ-5. הראו כי A מכילה שני מספרים אשר מכפלתם היא ריבוע שלם.

שאלה 3:

הוכיחו כי קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$e^{n+2011} < \sum_{k=2012}^n 2^k \binom{n}{k} < \pi^{n-2013}$$

שאלה 4:

פלג מטיל קובייה בעלת 6 פאות עליהן רשומים מספרים 1, ..., 6. מה הסיכוי כי ב- n הטלות הקובייה לעולם לא יופיעו שני מספרים זוגיים ברצף?

שאלה 5:

יהי G גרף בו קיימים בדיוק שני קדקודים x, y בעלי דרגה אי-זוגית, והם לא מחוברים בצלע. נגדיר $G' = G + (x, y)$. הוכח: G קשיר אם ורק אם G' קשיר.

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר א' תשע"ד, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות. **לא** תינתן הארכת זמן.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:יהי $n \geq 2$ שלם. הוכיחו:

$$2n \cdot 3^{n-1} + 4n(n-1)3^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} 2^k$$

שאלה 2:

הראו כי בכל קבוצה של 1009 מספרים שלמים חיוביים קיימים שני איברים אשר סכומם או הפרשם מתחלק ב-2014.

שאלה 3:

עבור n שלם חיובי, נסמן ב D_n את מספר התמורות על n איברים ללא נקודת שבת. הוכיחו: D_n אי זוגי אם ורק אם n זוגי.

שאלה 4:

כמה פתרונות בשלמים אי שליליים קיימים למשוואה $2x_1 + 10x_2 + x_3 = n$ כאשר $x_3 \leq 9$ וכן $x_1 \geq 1$?

שאלה 5:

הוכיחו כי בכל גרף G על 10 קדקודים עם 28 צלעות קיים מעגל באורך 4.

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר א' תשע"ד, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות. **לא** תינתן הארכת זמן.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניס.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:

יהיו $n \geq k \geq 1$ שלמים חיוביים. קבעו את מספר הפונקציות המונוטוניות העולות חלש

$$f: [k] \rightarrow [n].$$

שאלה 2:

גל הולכת מדי יום לחנות ירקות וקונה 4 סוגי ירקות בכדי להכין סלט. אצל הירקן של גל יש מבחר של אותם 10 סוגי ירקות מדי יום. הוכיחו כי במהלך חודש אוגוסט (31 ימים), אותה שלישיית ירקות תופיע בסלט של גל בשני ימים שונים.

שאלה 3:

הוכיחו כי קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ ולכל שני קבועים $\alpha < 4 < \beta$ מתקיים:

$$\alpha^n < \sum_{k=999}^{n-999} k \binom{n}{k} \binom{n+1}{k} < \beta^n$$

שאלה 4:

יהי n שלם חיובי. כמה סדרות על $\{1, 2\}$ קיימות אשר סכום איבריהן הוא n ?

שאלה 5:

עבור $n \geq k \geq 1$ שלמים, נסמן ב- $f(k, n)$ את המספר המירבי של צלעות בגרף על n קודקודים עם

$$f(k, n) = \binom{n-k+1}{2} \quad k \text{ רכיבי קשירות בדיוק. הראו:}$$

(הראו גם את החסם התחתון וגם את החסם העליון על $f(k, n)$!)

בהצלחה!

בחינה במבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים 0366.1123

סמסטר א' תשע"ה, מועד א'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **שלוש** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוניים.
- ענה/י על כל 5 השאלות.
- פתרון מלא של כל ארבע מהשאלות יזכה אותך ב-90 נקודות; פתרון מלא של כל חמש השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- יש להגיע לתשובה מספרית בשאלה מספרית.
- **לתשומת לבך!** יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:

$$\text{יהי } n \geq 2 \text{ שלם. הוכיחו: } \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2} = \binom{2n}{n}^2$$

שאלה 2:

חילוון מטייל על גרם של שלוש מדרגות. בכל יום חול החילוון עולה מדרגה אחת או יורד מדרגה אחת, וביום שבת הוא נח בתחתית המדרגות. הוכיחו כי לאחר שישה שבועות מלאים, אם החילוון התחיל את הטיול בתחילת יום ראשון מתחתית גרם המדרגות, קיימים שני שבועות בהם החילוון טייל באותו מסלול, כלומר היה באותה מדרגה באותה יממה בשבוע.

שאלה 3:

מהו מספר המילים באורך 4 מעל א"ב $\{1,2,\dots,9\}$ בהן אף ספרה לא מופיעה בדיוק פעמיים?

שאלה 4:

נסמן ב- $f(n)$ את מספר התת ריבועים בלוח שח בגודל $n \times n$. למשל,
 $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 14$. חישבו את $f(n)$.

שאלה 5:

הראו כי לכל $n \geq 2$ שלם, קיים גרף G על n קודקודים עם $n - 1$ דרגות קודקודים שונות.

בהצלחה!