בחינה בתורת הגרפים

סמסטר ב׳ תשס״ג, מועד א׳

המרצה: פרופ׳ מ. קריבלביץ׳

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על כל 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 22 נקודות. אם צברת יותר מ-100 נקודות ציונך יהיה 100.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי ״חירום״. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס׳ הסטודנט על טופס הבחינה!**

מס׳ סטודנט:

בהצלחה!

שאלה 1:

הוכח כי לכל זוג שלמים $k,l \geq 2$ קיים שלם $n=n(k,l)$ כך שכל צביעה של הצלעות של הגרף השלם K_n על n קדקדים בצבעים אדום וכחול מכילה K_k אדום או K_l כחול.

שאלה 2:

יהיו k,s,t שלמים חיוביים אשר מקיימים: $k(s+1)>2t$. הוכח: אם G גרף k-קשיר צלעית אזי סילוק של כל קבוצה של t צלעות מ-G משאיר גרף עם לכל היותר s רכיבי קשירות.

שאלה 3:

יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי שבו קיים זיווג בגודל $|A|$. הוכח כי קיים קדקד $a\in A$ כך שכל צלע של G הסמוכה ל-a מוכלת בזיווג בגודל $|A|$ ב-G.

שאלה 4:

הוכח: $\mathrm{ex}(n,H_n)=\binom{n-1}{2}+1$, כאשר $\mathrm{ex}(n,H_n)$ הוא מספר טורן (Turán) של מעגל המילטון H_n על n קדקדים.

שאלה 5:

יהי $k\geq 3$ שלם ויהי G גרף עם מספר צביעה $\chi(G)=k+2$. הוכח: G מכיל מעגל C באורך l אשר מקיים: $l\equiv 2 \bmod k$.

- סוף -

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר ב' תשס"ג, מועד ב'

<u>המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- <u>אין</u> להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על כל 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 22 נקודות. אם צברת יותר מ-100 נקודות ציונך יהיה 100.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס' סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכח: מספר העצים הפורשים על n קדקדים הוא n^{n-2}.

<u>שאלה 2:</u>

יהי G גרף קשיר על לפחות 4 קדקדים שבו כל צלע משתתפת בזיווג מושלם. הוכח: G הינו 2-קשיר.

<u>שאלה 3:</u>

יהיו $1 \le k \le n$ מספרים שלמים ויהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים A, B בגודל $|A|=|B|=n$. הוכח: אם G אינו מכיל זיווג בגודל $k+1$ אזי ב-G יש לכל היותר kn צלעות.

<u>שאלה 4:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף עם דרגה מירבית Δ. הוכח: קיימת צביעה צלעית חוקית של G ב-$\Delta+1$ צבעים שבה כל צבע מופיע $\left\lfloor \frac{|E(G)|}{\Delta+1} \right\rfloor$ או $\left\lceil \frac{|E(G)|}{\Delta+1} \right\rceil$ פעמים.

<u>שאלה 5:</u>

הוכח: לכל מספר טבעי k קיים $n=n(k)$ כך שבכל סדרה של n מספרים שונים קיימת תת-סדרה עולה או תת-סדרה יורדת באורך k.

<u>בהצלחה!</u>

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר ב׳ תשס״ד, מועד א׳

<u>המרצה: פרופ׳ מ. קריבלביץ׳</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- <u>**אין**</u> להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי ״חירום״. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס׳ הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס׳ סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכח את משפט טוראן (Turán): יהיו $n,r \geq 2$ שלמים. נניח $n = q(r-1)+s$ כאשר $0 \leq s \leq r-2$. יהי $T^{r-1}(n)$ גרף $(r-1)$-צדדי שלם עם s צדדים בגודל $q+1$ ו-$(r-1-s)$ צדדים בגודל q. נסמן $t_{r-1}(n) = |E(T^{r-1}(n))|$. הוכח כי כל גרף G על n קדקדים ללא עותק של K_r עם לפחות $t_{r-1}(n)$ צלעות איזומורפי ל-$T^{r-1}(n)$.

<u>שאלה 2:</u>

הוכח כי כל גרף G על n קדקדים עם לפחות $2n-2$ צלעות מכיל שני מעגלים עם אורך שווה.

<u>שאלה 3:</u>

יהי $G=(A \cup B,E)$ גרף דו-צדדי ללא קדקדים מבודדים. נסמן ב-$\alpha(G)$ את הגודל המירבי של קבוצה בלתי תלויה ב-G, וב-$\rho(G)$ את הגודל המזערי של קבוצת הצלעות של G שאיחודה הוא $V(G)$. הוכח: $\alpha(G) = \rho(G)$.

<u>שאלה 4:</u>

יהי G גרף שבו כל צלע שייכת ללכל היותר k מעגלים. הוכח: $\chi(G) \leq k+2$.

<u>שאלה 5:</u>

הוכח כי לכל שלם חיובי r קיים שלם n כך שכל גרף קשיר G על n קדקדים מכיל גרף שלם K_r או גרף דו-צדדי שלם $K_{1,r}$ או מסלול P_r באורך r צלעות כגרף <u>מושרה</u>.

<u>בהצלחה!</u>

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר ב׳ תשס״ד, מועד ב׳

<u>המרצה: פרופ׳ מ. קריבלביץ׳</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- **<u>אין</u>** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס׳ הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס׳ סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכח את משפט דירק (Dirac): יהי $G=(V,E)$ גרף על $n\ge 3$ קדקדים שבו כל דרגה היא לפחות $n/2$. אזי G מכיל מעגל המילטון.

<u>שאלה 2:</u>

יהיו d,k שלמים חיוביים. יהי $T=(V,E)$ עץ על לפחות $k+1$ קדקדים מדרגה מירבית לכל היותר d. הוכח: קיימת צלע $e\in E(T)$ כך שבלפחות אחד משני העצים המתקבלים מ- T אחרי הסילוק של e יש בין k ל- dk קדקדים.

<u>שאלה 3:</u>

יהי G גרף על $n\ge 4$ קדקדים עם לפחות $n+1$ צלעות. הוכח: G מכיל מעגל באורך לכל היותר $\left\lfloor \frac{2n+2}{3} \right\rfloor$.

<u>שאלה 4:</u>

יהי k שלם חיובי. הוכח: גרף $G=(V,E)$ הוא 2^k-צביע אם ורק אם קיימת חלוקה $E=E_1\cup\ldots\cup E_k$ של קבוצת הצלעות E של G ל- k חלקים כך שלכל $1\le i\le k$ הגרף שקבוצת צלעותיו היא E_i הינו גרף דו-צדדי.

<u>שאלה 5:</u>

יהיו $s,t\ge 2$ שלמים. נסמן ב- $r=R(s,t)$ את מספר רמזי (Ramsey) של s ו- t. יהי $G=(V,E)$ גרף שבו כל צביעה של קבוצת הצלעות E באדום ובכחול מכילה עותק אדום של הגרף השלם K_s או עותק כחול של הגרף השלם K_t. הוכח: $\chi(G)\ge r$ כאשר $\chi(G)$ הוא מספר הצביעה של G.

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשס"ו, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!**

מס' סטודנט:

שאלה 1:

הוכח את משפט Chvátal-Erdős: יהי G גרף על לפחות שלושה קדקדים עם קשירות $\kappa(G)$ וקבוצה בלתי תלויה מירבית בגודל $\alpha(G)$. הוכח: אם $\kappa(G) \ge \alpha(G)$, אז G מכיל מעגל המילטון.

שאלה 2:

יהי G גרף על n קדקדים עם קשירות $\kappa(G) = k \ge 1$. הוכח: $n \ge k(diam(G)-1)+2$, כאשר $diam(G)$ הינו המרחק המירבי (בצלעות) בין זוג קדקדי G.

שאלה 3:

יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי מדרגה מירבית $\Delta \ge 1$. נסמן $V_0 = \{v \in A\cup B : d(v) = \Delta\}$ (כלומר, V_0 היא קבוצת הקדקדים של G מדרגה מירבית).
הוכח: G מכיל זיווג M המכסה את כל קדקדי V_0.

שאלה 4:

יהי G גרף שבו לכל זוג של שתי צלעות זרות $e_1, e_2 \in E(G)$ קיימת צלע $f \in E(G)$ המחברת בין e_1 לבין e_2 (כלומר, G אינו מכיל זיווג מושרה בגודל 2). הוכח:
$\chi(G) \le \binom{\omega(G)}{2} + \omega(G)$, כאשר $\omega(G)$ הינו מספר הקליקה של G.

שאלה 5:

הוכח כי לכל שלם חיובי k ולכל קבוע ממשי M קיים שלם n כך שכל משפחה F של n עיגולי יחידה במישור מכילה k עיגולים אשר לכולם נקודה משותפת, או k עיגולים כך שהמרחק בין כל שניים מהם הוא לפחות M.

<u>בהצלחה!</u>

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר א' תשס"ו, מועד ב'

<u>המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- <u>**אין**</u> להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. דף אחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס' סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכח כי גרף קשיר G מכיל מעגל אוילר (Euler) אם ורק אם כל דרגותיו הן זוגיות.

<u>שאלה 2:</u>

יהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים A,B בגודל $|A|=|B|=n$ בעל דרגה מזערית $\delta(G)\ge n/2$. הוכח: G מכיל זיווג מושלם.

<u>שאלה 3:</u>

יהי G גרף שבו כל צלע שייכת למעגל אי-זוגי אחד לכל היותר. הוכח כי G הינו 3-צביע.

<u>שאלה 4:</u>

יהי r שלם חיובי. הראה כי <u>כל</u> גרף G מקיים <u>לפחות</u> אחת מהתכונות הבאות:

(א) G הינו r-צביע;

(ב) G מכיל עותק <u>מושרה</u> של מעגל C <u>כלשהו</u> על לכל היותר $2r+1$ קדקדים;

(ג) G מכיל עותק <u>מושרה</u> של <u>כל</u> עץ T על r קדקדים.

<u>שאלה 5:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף על $|V|=1000$ קדקדים עם $|E|=250001$ צלעות. הוכח כי G מכיל שני משולשים החולקים צלע משותפת.

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תש"ע, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!**

מס' סטודנט:

שאלה 1:

הוכח את משפט טוראן (Turán): יהיו $n,r\ge 2$ שלמים. נסמן ב- $T_{r-1}(n)$ את הגרף ה-$(r-1)$-צדדי השלם על n קודקודים עם מספר מירבי של צלעות. הוכח כי כל גרף על n קודקודים עם $ex(n,K_r)$ צלעות ללא עותק של K_r הינו איזומורפי ל- $T_{r-1}(n)$.

שאלה 2:

יהי G גרף קשיר על $n\ge 2$ קודקודים. עבור זוג u,v של קודקודי G נסמן ב- $dist(u,v)$ את המרחק בין u ל-v ב-G, שהוא המספר המזערי של צלעות במסלול בין u ל-v ב-G.
הוכח:

$$\sum_{u\neq v\in V(G)} dist(u,v)\le \binom{n+1}{3}.$$

שאלה 3:

יהי G גרף על $n\ge 3$ קודקודים מדרגה מזערית לפחות $\frac{n+1}{2}$. הוכח כי כל צלע של G נמצאת על מעגל המילטון ב- G.

שאלה 4:

יהי G גרף k-צביע. תהי $P\subseteq V(G)$ קבוצת קודקודים ב- G שבה כל שני קודקודים נמצאים במרחק 4 לפחות זה מזה ב- G. הוכח: לכל k-צביעה c_0 של P בצבעים $\{1,\dots,k\}$ קיימת $(k+1)$-צביעה חוקית c של קודקודי G אשר מזדהה עם c_0 על P.

שאלה 5:

נסמן ב- mK_2 את הזיווג בגודל m. הוכח: $R(mK_2)=3m-1$, כאשר $R(G)$ הוא מספר רמזי של G, שהוא המספר השלם המזערי n עבורו כל 2-צביעה של צלעותיו של הגרף השלם K_n מכילה עותק מונוכרומטי של G. (יש להוכיח גם את החסם התחתון וגם את העליון!)

בהצלחה!

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר א׳ תש״ע, מועד ב׳

<u>המרצה: פרופ׳ מ. קריבלביץ׳</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- **<u>אין</u>** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי ״חירום״. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס׳ הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס׳ סטודנט :</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכח כי כל גרף מישורי הינו 5-צביע.

<u>שאלה 2:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר עם מספר זוגי של קדקודים. הוכח: G מכיל תת-גרף פורש $G'=(V,F)$ בו כל הדרגות אי-זוגיות.

<u>שאלה 3:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף על n קדקודים, n זוגי, בו $d(u)+d(v)\geq n-1$ לכל זוג קדקודים $u\neq v\in V$. הראה: G מכיל זיווג מושלם.

<u>שאלה 4:</u>

יהי G גרף על n קדקודים מִדרגה מזערית גדולה מ- $\frac{n}{2}$. הוכח: G מכיל מעגל מכל אורך בין 3 ל- n.

<u>שאלה 5:</u>

תהי S קבוצה של n נקודות במישור בה המרחק בין כל זוג נקודות אינו עולה על 1. הראה: מספר הזוגות הלא סדורים של נקודות מ- S במרחק יותר מ- $\frac{1}{\sqrt{2}}$ הוא לכל היותר $\frac{n^2}{3}$.

בהצלחה!

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר א' תשע"א, מועד א'

<u>המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- <u>**אין**</u> להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס' סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכח כי לכל זוג שלמים $k,l \geq 2$ קיים שלם $n=n(k,l)$ כך שכל צביעה של הצלעות של הגרף השלם K_n על n קודקדים בצבעים אדום וכחול מכילה K_k אדום או K_l כחול.

<u>שאלה 2:</u>

יהי G גרף קשיר עם מעגלים. הוכח כי G מכיל מעגל באורך לכל היותר $2\cdot diam(G)+1$, כאשר $diam(G)$ הינו המרחק המירבי (בצלעות) בין זוג קדקדי G.

<u>שאלה 3:</u>

הוכח כי כל גרף 3-קשיר לא דו-צדדי G מכיל לפחות 4 מעגלים אי-זוגיים.

<u>שאלה 4:</u>

הוכח כי כל צביעה של הצלעות של הגרף השלם K_n על $n \geq 3$ קודקדים בצבעים אדום וכחול מכילה מעגל המילטון המורכב משני מסלולים מונוכרומטיים.

<u>שאלה 5:</u>

יהי k שלם חיובי ויהי $G=(A\cup B,E)$ גרף דו-צדדי עם זיווג מושלם שבו דגרתו של כל קודקד בצד A הינה לפחות k. הראה G מכיל לפחות $k!$ זיווגים מושלמים.

<u>בהצלחה!</u>

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א׳ תשע״א, מועד ב׳

המרצה: פרופ׳ מ. קריבלביץ׳

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה על **4** מתוך 5 השאלות. פתרון מלא של כל שאלה יזכה אותך ב- 25 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי ״חירום״. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס׳ הסטודנט על טופס הבחינה!**

מס׳ סטודנט:

שאלה 1:

נסח והוכח את משפט הול (Hall) על זיווגים בגרפים דו-צדדיים.

שאלה 2:

יהי G גרף קשיר על $n \geq 3$ קדקודים בו כל צלע משתתפת במשולש אחד לפחות. הוכח: $|E(G)| \geq \frac{3(n-1)}{2}$.

שאלה 3:

יהי G גרף קשיר על n קדקודים. הוכח כי המספר הכולל של קבוצות בלתי תלויות ב-G אינו עולה על $2^{n-1}+1$.

שאלה 4:

יהי d טבעי. הוכח כי כל גרף $2d$-רגולרי קשיר $G=(V,E)$ עם מספר זוגי של צלעות מכיל תת-גרף פורש d-רגולרי $H=(V,F)$.

שאלה 5:

הוכח כי כל גרף G על n קדקודים ללא משולשים הינו $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$-צביע.

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א׳ תשע״ב, מועד א׳

המרצים: פרופ׳ נ. אלון, פרופ׳ מ. קריבלביץ׳

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי ״חירום״. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס׳ הסטודנט על טופס הבחינה!**

מס׳ סטודנט:

שאלה 1:

הוכיחו את משפט Dirac: אם G גרף פשוט בעל $n \geq 3$ צמתים, ולכל צומת v של G דרגה $d(v) \geq \frac{n}{2}$, אז G המילטוני.

שאלה 2:

יהא G גרף פשוט 2-קשיר בעל מספר צביעה $\chi(G) = 3$. הוכיחו כי כל צומת v ב-G מוכל במעגל אי-זוגי.

שאלה 3:

הוכיחו כי בכל גרף G בעל לפחות 2 צמתים קיים הילוך סגור שעובר בכל קשת של G בדיוק פעם אחת בכל כיוון.

שאלה 4:

יהא G גרף פשוט r-קשיר בעל מספר זוגי של צמתים, כאשר $r \geq 1$ שלם. נניח כי G אינו מכיל את הגרף $K_{1,r+1}$ כתת-גרף מושרה. הוכיחו כי G מכיל זיווג מושלם.

שאלה 5:

הוכיחו כי לכל עץ T ולכל שלם g, קיים גרף G ללא מעגלים באורך לכל היותר g, כך שבכל צביעה של קשתות G ב-2 צבעים יש עותק חד-גוני (מונוכרומטי) של T.

בהצלחה!

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר א' תשע"ב, מועד ב'

<u>המרצים: פרופ' נ. אלון, פרופ' מ. קריבלביץ'</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- **<u>אין</u>** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס' סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכיחו את משפט Petersen : בכל גרף 3-רגולרי ללא גשרים קיים זיווג מושלם.

<u>שאלה 2:</u>

יהי G גרף בו לכל זוג קדקודים יש מספר אי-זוגי של שכנים משותפים. הוכיחו כי G אוילריאני.

<u>שאלה 3:</u>

הוכיחו כי גרף G הוא 2-קשיר אם ורק אם לכל שלשה סדורה (x,y,z) של קדקודים שונים ב-G,G מכיל מסלול מ-x ל-z העובר דרך y.

<u>שאלה 4:</u>

מהו המספר המירבי האפשרי של צלעות בגרף פשוט בעל 2n קדקודים אשר אינו מכיל זיווג מושלם? נמקו את התשובה!

<u>שאלה 5:</u>

הוכיחו כי לכל זוג גרפים H_1 ו-H_2 קיים גרף G כך שבכל צביעה של קדקודי G באדום ובכחול קיים ב-G תת-גרף מושרה האיזומורפי ל- H_1 שכל קדקודיו אדומים, או קיים ב-G תת-גרף מושרה האיזומורפי ל- H_2 שכל קדקודיו כחולים.

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשע"ג, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!**

מס' סטודנט:

שאלה 1:

הוכיחו כי לכל זוג שלמים $k,l\geq 2$ קיים שלם $n=n(k,l)$ כך שכל צביעה של הצלעות של הגרף השלם K_n על n קדקודים בצבעים אדום וכחול מכילה K_k אדום או K_l כחול.

שאלה 2:

יהי $G=(V,E)$ גרף המכיל שני עצים פורשים זרי צלעות. הוכיחו כי G מכיל תת-גרף פורש $H=(V,F)$ כך ש-H קשיר וכל דרגותיו זוגיות.

שאלה 3:

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר על n קדקודים עם דרגה מזערית d. הוכיחו כי G מכיל מסלול P עם $\min\{2d, n-1\}$ צלעות.

שאלה 4:

יהיו k,n,N שלמים חיוביים המקיימים: $N=kn$. תהיינה $[N]=A_1\cup\ldots\cup A_n=B_1\cup\ldots\cup B_n$ שתי חלוקות של הקבוצה $[N]=\{1,\ldots, N\}$ ל-n קבוצות זרות בגודל k כל אחת. הוכיחו כי קיימים איברים $a_1,\ldots,a_n\in[N]$ ותמורה $\sigma\in S_n$ כך ש- $a_i\in A_i\cap B_{\sigma(i)}$, $i=1,\ldots,n$.

שאלה 5:

יהי $G=(V,E)$ גרף עם דרגה מירבית D. נסמן $k=\left\lfloor\frac{D}{2}\right\rfloor+1$. הוכיחו כי קיימת חלוקה $V=V_1\cup\ldots\cup V_k$ בה כל קבוצה V_i פורשת גרף ללא מעגלים ב-G.

בהצלחה!

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר א' תשע"ג, מועד ב'

<u>המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- **<u>אין</u>** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מס' הסטודנט על טופס הבחינה!</u>**

<u>מס' סטודנט:</u>

<u>שאלה 1:</u>

הוכיחו כי גרף קשיר G מכיל מעגל אוילר (Euler) אם ורק אם כל דרגותיו זוגיות.

<u>שאלה 2:</u>

הוכיחו או הפריכו: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. אז G דו-צדדי אם ורק אם לא קיימת שלישיית קדקודים $x,y,z\in V$ כך ש- $(x,y)\in E$ ו- $\mathrm{dist}_G(x,z)=\mathrm{dist}_G(y,z)$, כאשר $\mathrm{dist}_G(u,v)$ הינו המספר המזערי של צלעות במסלול בין u ל- v ב-G.

<u>שאלה 3:</u>

יהי G גרף 2-קשיר. נסמן ב-l את האורך המירבי (בצלעות) של מעגל ב-G. הוכיחו כי כל שני מעגלים באורך l ב-G חולקים לפחות שני קדקודים משותפים.

<u>שאלה 4:</u>

יהי G גרף d-רגולרי, $d\ge 2$, עם קשירות קדקודית $\kappa(G)=1$. מיצאו את מספר הצביעה הצלעי $\chi'(G)$.

<u>שאלה 5:</u>

הוכיחו כי לכל k טבעי קיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ כל גרף G על n קדקודים המקיים: $\alpha(G)\le k$ מכיל מעגל באורך לפחות cn.

בהצלחה!

ת.ז: ______________   מס' מחברת: ______

<u>בחינה בתורת הגרפים</u>

סמסטר א' תשע"ד, מועד א'

<u>המרצים: פרופ' נ. אלון, פרופ' מ. קריבלביץ'</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- **<u>אין</u>** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!</u>**

<u>שאלה 1:</u>

הוכיחו את משפט Chvátal-Erdős: יהי G גרף על לפחות שלושה צמתים עם קשירות k וקבוצה בלתי תלויה מירבית בגודל $\alpha(G)$. אם $k \geq \alpha(G)$ אזי G מכיל מעגל המילטון.

<u>שאלה 2:</u>

הוכיחו כי כל גרף $G=(V,E)$ בעל $n \geq 2$ צמתים ודרגה מינימלית δ מכיל תת-גרף פורש בעל דרגה מינימלית δ ולכל היותר $(n-1)\delta$ קשתות.

<u>שאלה 3:</u>

הוכיחו כי לכל $k \geq 2$ שלם, לכל גרף $G=(V,E)$ k-קשיר ולכל קבוצה $S \subseteq V$, $|S|=k$, קיים מעגל ב-G העובר דרך כל אברי S.

<u>שאלה 4:</u>

יהי $G=(A \cup B, E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים A, B ונניח כי לכל צומת ב-A דרגה חיובית וכן לכל קשת $(a,b) \in E$ כאשר $a \in A$, $b \in B$, קיים: $d(a) \geq d(b)$. הוכיחו כי יש ב-G זיווג המרווה את A.

<u>שאלה 5:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף בעל n צמתים שבו קיימים שני צמתים במרחק לפחות d. הוכיחו כי מספר הצביעה של G מקיים:

$$\chi(G) \leq n-d+1 .$$

בהצלחה!

ת.ז: ______________   מס' מחברת: ______

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשע"ד, מועד ב'

המרצים: פרופ' נ. אלון, פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!**

שאלה 1:

הוכיחו כי אם k, n שלמים חיוביים עבורם $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, אז מספר רמזי $r(k,k)$ מקיים: $r(k,k) > n$.

שאלה 2:

יהי $G = (V, E)$ גרף בעל n קדקודים ובו זוג קדקודים $u, v \in V$ שהמרחק בינהם ב-G הוא $3b$, עבור שלם חיובי b. כמו כן, תהי δ הדרגה המזערית ב-G. הוכיחו:
$n \geq (b+1)(\delta+1)$.

שאלה 3:

עבור גרף קשיר $G = (V, E)$ ושלם חיובי k נסמן ב-G^k את הגרף שקבוצת קדקודיו היא V, וקדקודים $u \neq v \in V$ מחוברים בצלע אם ורק אם המרחק בינהם ב-G הוא לכל היותר k.
יהי G גרף קשיר על n קדקודים ונניח כי $1 \leq k \leq n-1$ שלם. הראו כי הגרף G^k הינו k-קשיר.

שאלה 4:

יהיו $1 \leq k < n$ שלמים, ותהי $A = (a_{ij})$ מטריצה בת k שורות ו-n עמודות, בה כל שורה היא תמורה של $\{1, \dots, n\}$, ובכל עמודה כל האיברים שונים. הוכיחו: קיימת מטריצה B בת n שורות ו-n עמודות כך ש-k השורות הראשונות של B זהות לאלה של A, וכן כל שורה וכל עמודה של B מהווה תמורה של $\{1, \dots, n\}$.

שאלה 5:

יהיו $k, n \geq 1$ שלמים כך ש-$n \geq 3k$, ויהי $G = (V, E)$ גרף על n קדקודים המקיים: $\alpha(G) \leq k$, כאשר $\alpha(G)$ הוא הגודל המירבי של קבוצה בלתי תלויה ב-G. הוכיחו כי G מכיל מעגל באורך לפחות n/k.

בהצלחה!

ת.ז: ________________ מס' מחברת: ______

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשע"ה, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!**

שאלה 1:

הוכיחו את משפט König: יהי G גרף דו-צדדי עם מספר כיסוי τ ומספר זיווג ν, אז: $\tau = \nu$.

שאלה 2:

יהי $G = (V, E)$ גרף על n קדקודים ללא קדקודים מבודדים. הוכיחו כי קיימת קבוצה $S \subset V$ כך ש- $|S| \leq \frac{n}{2}$, ולכל קדקוד $v \in V \setminus S$ יש שכן ב- S.

שאלה 3:

יהי T עץ עם בדיוק $k \geq 2$ עלים, ונניח כי $v \in V(T)$ קדקוד מדרגה לפחות k ב-T. הראו כי $\mathrm{T} - v$ הינו איחוד זר של k מסלולים זרים ולא ריקים.

שאלה 4:

יהי T עץ על $n \geq 4$ קדקודים עם $\Delta(T) < n - 1$. הוכיחו כי המשלים $\overline{T}$ מכיל מסלול המילטון.

שאלה 5:

יהיו $m, n \geq 2$ שלמים כך ש-$(m-1)$ מחלק את $n-1$. יהי T עץ על m קדקודים. חשבו את מספר רמזי $R(T, K_{1,n})$. נמקו את תשובתכם/ן!

בהצלחה!

מס׳ מחברת: ______ ת.ז: _______________

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א׳ תשע״ה, מועד ב׳

<u>המרצה: פרופ׳ מ. קריבלביץ׳</u>

- משך הבחינה **3** שעות.
- **<u>אין</u>** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענה/י על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה אותך ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה אותך ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבך! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי ״חירום״. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש <u>להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!</u>**

<u>שאלה 1:</u>

יהיו $k,n\geq 2$ שלמים המקיימים: $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$. הוכיחו כי $R(k,k)>n$.

<u>שאלה 2:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף על n קדקודים ללא מעגלים זוגיים. הראו כי $|E|\leq \frac{3}{2}(n-1)$.

<u>שאלה 3:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. הוכיחו כי קיים קדקוד $v\in V$ כך שהגרף $G'=G-v$ קשיר.

<u>שאלה 4:</u>

יהי k שלם חיובי. נניח כי קבוצות $S_1,\dots,S_n\subseteq X$ מקיימות: לכל $\emptyset\neq I\subseteq[n]$, $\left|\bigcup_{i\in I}S_i\right|\geq k|I|$. הראו כי קיימות קבוצות זרות $X_1,\dots,X_n\subseteq X$ כך ש- $|X_i|=k$, $X_i\subseteq S_i$, $i=1,\dots,n$.

<u>שאלה 5:</u>

יהי G גרף ללא מסלול עם k צלעות. הוכיחו: $\chi(G)\leq k$.

בהצלחה!

ת.ז: ________________ מס' מחברת: ______

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשפ"ב, מועד א'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענו על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבכם/ן! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!**

שאלה 1:

הוכיחו את משפט Dirac: יהי G גרף על $n \geq 3$ קדקודים עם $\delta(G) \geq n/2$. אז G המילטוני.

שאלה 2:

הוכיחו כי לכל שלם $k \geq 2$, כל גרף G עם m צלעות מכיל תת-גרף k-צדדי עם לפחות $\left(1-\frac{1}{k}\right)m$ צלעות.

שאלה 3:

יהי T עץ עם בדיוק $2k$ עלים. הראו כי T מכיל k מסלולים (לאו דווקא זרי צלעות) $P_1, \dots, P_k$ כך ש- $E(T) = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$.

שאלה 4:

הוכיחו: אם כל צלע בגרף קשיר G היא הצלע המשותפת היחידה של זוג מעגלים ב-G, אז G הינו 3-קשיר צלעית.

שאלה 5:

יהיו $n = R(k,l)$ כאשר $R(k,l)$ הוא מספר רמזי. הוכיחו: לכל צלע $e \in E(K_n)$ קיימת צביעה של הצלעות של $K_n - e$ באדום ובכחול ללא K_k אדום וללא K_l כחול.

בהצלחה!

ת.ז: ________________ מס' מחברת: ______

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשפ"ב, מועד ב'

המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה **3** שעות.
- **אין** להשתמש באף סוג של חומר עזר לרבות מחשבונים.
- ענו על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה ב-100 נקודות.
- **לתשומת לבכם/ן! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!**

שאלה 1:

נסחו והוכיחו את משפט הול (Hall) על זיווגים בגרפים דו-צדדיים.

שאלה 2:

אפיינו את כל הגרפים G על $n \geq 3$ קדקודים בהם לכל קדקוד $v \in V(G)$ הגרף $G - v$ הוא עץ.

שאלה 3:

יהי G גרף אוילריאני 2-קשיר. תהיינה $e, f \in E(G)$ צלעות סמוכות ב-G ($e \cap f \neq \emptyset$).
הוכיחו: G מכיל מעגל אוילר בו e, f צלעות עוקבות.

שאלה 4:

יהי G גרף חסר משולשים. הוכיחו: $\chi(G) \leq \nu(G) + 2$, כאשר $\chi(G)$ הוא מספר הצביעה של G ו-$\nu(G)$ הוא מספר הזיווג של G.

שאלה 5:

נסמן ב-$f(n)$ את מספר הצלעות המירבי האפשרי בגרף G על n קדקודים עבורו קיימת הכוונת צלעות $\vec{G}$ בה כל משולש הוא ציקלי (קדקודים u, v, w, צלעות מכוונות $(\overrightarrow{u,v}), (\overrightarrow{v,w}), (\overrightarrow{w,u})$). הראו: $f(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$.

בהצלחה!