

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשפ"ב, מועד א'
המרצה: פרופ' מ. קריבלביץ'

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענו על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה ב- 100 נקודות.
- לתשומת לבכם! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:

הוכיחו את משפט Dirac: יהי G גרף על $n \geq 3$ קדקודים עם $\delta(G) \geq n/2$. אז G המילטוני.

שאלה 2:

הוכיחו כי לכל שלם $k \geq 2$, כל גרף G עם m צלעות מכיל תת-גרף k -צדדי עם לפחות

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)m \text{ צלעות.}$$

שאלה 3:

יהי T עץ עם בדיוק $2k$ עלים. הראו כי T מכיל k מסלולים (לאו דווקא זרי צלעות) $P_1, \dots, P_k$ כך ש- $E(T) = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$.

שאלה 4:

הוכיחו: אם כל צלע בגרף קשיר G היא הצלע המשותפת היחידה של זוג מעגלים ב- G , אז G הינו 3-קשיר צלעית.

שאלה 5:

יהיו $n = R(k, l)$ כאשר $R(k, l)$ הוא מספר רמזי. הוכיחו: לכל צלע $e \in E(K_n)$ קיימת צביעה של הצלעות של $K_n - e$ באדום ובכחול ללא K_k אדום וללא K_l כחול.

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים

סמסטר א' תשפ"ב, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלניץ

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש באף סוג של חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענו על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה ב- 100 נקודות.
- לתשומת לבכם/ן! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי "חירום". מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום את מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:

נסחו והוכיחו את משפט הול (Hall) על זיווגים בגרפים דו-צדדיים.

שאלה 2:

אפיינו את כל הגרפים G על $n \geq 3$ קדקודים בהם לכל קדקוד $v \in V(G)$ הגרף $G - v$ הוא עץ.

שאלה 3:

יהי G גרף אוילריאני 2-קשיר. תהינה $e, f \in E(G)$ צלעות סמוכות ב- G ($e \cap f \neq \emptyset$). הוכיחו: G מכיל מעגל אוילר בו e, f צלעות עוקבות.

שאלה 4:

יהי G גרף חסר משולשים. הוכיחו: $\chi(G) \leq \nu(G) + 2$, כאשר $\chi(G)$ הוא מספר הצביעה של G ו- $\nu(G)$ הוא מספר הזיווג של G .

שאלה 5:

נסמן ב- $f(n)$ את מספר הצלעות המירבי האפשרי בגרף G על n קדקודים עבורו קיימת הכוונת צלעות $\vec{G}$ בה כל משולש הוא ציקלי (קדקודים u, v, w , צלעות מכוונות

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor : \text{הראו: } (\overrightarrow{u, v}), (\overrightarrow{v, w}), (\overrightarrow{w, u})$$

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים 0366.3267

סמסטר א' תשפ"ג, מועד א'
המרצה: פרופ' מ. קריבלניץ'

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענו על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה ב- 100 נקודות.
- לתשומת לבכם! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:

נסחו והוכיחו את נוסחת קיילי (Cayley) למספר העצים הפורשים על n קודקודים מסומנים.

שאלה 2:

יהיו $k \geq 2, g$ שלמים. יהי G גרף עם דרגה מזערית k ללא מעגלים באורך קטן מ- g . הוכיחו: G מכיל מעגל באורך לפחות $2 + (k-1)(g-2)$.

שאלה 3:

תהיינה A, B קבוצות בלתי תלויות זרות בגרף G כאשר $\alpha(G) = |A|$. הראו כי הגרף הדו-צדדי $G[A \cup B]$ שקדקודיו הם $A \cup B$ וצלעותיו הן כל הצלעות של G העוברות בין A ל- B מכיל זיווג בגודל $|B|$.

שאלה 4

יהי G גרף עם דרגה מירבית Δ , ויהי τ קדקוד מדרגה Δ ב- G . ניצור גרף G' על ידי הוספת קדקוד חדש u וחיבורו ל- τ בצלע. קבעו את אינדקס הצביעה $\chi'(G')$. נמקו את תשובתכם.

שאלה 5:

יהיו m, n שלמים חיוביים כאשר n מתחלק ב- m . יהי T עץ עם m צלעות. הוכיחו: $R(T, K_{1, n+1}) = m + n + 1$ כאשר $R(G_1, G_2)$ מסמן את מספר רמזי של G_1 ו- G_2 . (יש להראות חסמים תחתון ועליון!)

בהצלחה!

בחינה בתורת הגרפים 0366.3267

סמסטר א' תשפ"ג, מועד ב'
המרצה: פרופ' מ. קריבלניץ

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבוני.
- ענו על 5 השאלות. פתרון מלא של כל 4 מהשאלות יזכה ב- 90 נקודות, ופתרון מלא של כל 5 השאלות יזכה ב- 100 נקודות.
- לתשומת לבכם! יש לרשום את התשובות לשאלות הבחינה בדפי התשובות המצורפים לטופס הבחינה. את התשובה לכל שאלה יש לרשום בדף המיועד לשאלה זו בדפי התשובות. הדף האחרון בדפי התשובות מיועד לשימוש במקרי מספר תעודת הזהות על טופס הבחינה!

שאלה 1:

הוכיחו את משפט Erdős-Szekeres: $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$, עבור $s, t \geq 2$ שלמים.

שאלה 2:

יהי T עץ על n קדקודים. הראו כי קיים קדקוד $v \in V(T)$ כך שכל העצים ב- $T - v$ מכילים לכל היותר $\frac{n}{2}$ קדקודים.

שאלה 3:

יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו-צדדי עם צדדים A ו- B המכיל מעגל המילטון. יהיו $x, y \in A \cup B$. הוכיחו: $G - x - y$ מכיל זיווג מושלם אם ורק אם $|\{x, y\} \cap A| = 1$.

שאלה 4:

יהי G גרף קשיר על n קדקודים עם מספר צביעה $\chi(G) = k$. הוכיחו:

$$|E(G)| \geq \binom{k}{2} + n - k$$

שאלה 5:

יהי T עץ עם k צלעות. הראו: $ex(n, T) \leq kn$, כאשר $ex(n, H)$ הוא המספר המירבי של צלעות בגרף על n קדקודים ללא עותק של H (מספר טורן של H).

בהצלחה!