27/10/2020 הרצאה 2

למשוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר 1
$$y'+a(x)y=b(x)$$

בשתי שיטות: וריאציית פרמטר וגורם אינטגרציה

גורם אינטגרציה	וריאציית פרמטר
1. מוצאים את $\mu(x)$ המקיים $\underbrace{(\mu y)'=\mu(y'+ay)}=\mu b$ $\Downarrow$ מספיק $\mu' y=\mu a y$, $\mu'=\mu a$	1. פותרים $y'+a(x)y=0$ $\Rightarrow$ $y=\tilde{c}\,y_h(x)$
2. מציבים μ ומשיגים $(\mu y)'=\mu b$, $\mu y=\int \mu b\,dx$	2. מציבים $\tilde{c}=\tilde{c}(x)$: $\tilde{c}' y_h+\underbrace{\tilde{c}y_h'+a\tilde{c}y_h}_{=0}=b$ מוצאים $\tilde{c}'$ מ $\tilde{c}' y_h=b$
קבוע שרירותי מופיע באינטגרל	קבוע שרירותי מופיע בתוך $\tilde{c}$

משוואת Bernoulli

$$y'+a(x)y=b(x)y^n\ ,\quad n>1$$

יכול להיות לא שלם

$y\equiv 0$ פתרון

הטריק: מחלקים ב y^n

$$\frac{y'}{y^n}+a(x)\frac{1}{y^{n-1}}=b(x) \qquad z(x)=\frac{1}{y^{n-1}}$$

$$z'(x)=-(n-1)\frac{y'}{y^n}$$

$$-\frac{1}{n-1}z'+a(x)z=b(x)$$

משוואה לינארית

16

דוגמא אוכלוסיה כדור הארץ
עם מחלה מדבקת קטלנית

$$\dot{N} = \lambda_0 N - \mu N^2$$

$\lambda_0 \approx 0.02$
ציון לגבי המגפה $\mu \doteq 10^{-14}$
[illegible]

Bernoulli

לכן - $N=0$

$$-\left(\frac{1}{N}\right)' = \frac{\dot{N}}{N^2} = \frac{\lambda_0}{N} - \mu \qquad Z = \frac{1}{N}$$

$$Z' + \lambda_0 Z = \mu$$

$$Z' + \lambda_0 Z = 0 \qquad Z \neq 0 \quad \text{נניח} \qquad 1$$

$$\frac{Z'}{Z} = -\lambda_0 \qquad \int \frac{Z'\,dt}{Z} = -\lambda_0 t + c_1$$

$$\ln|Z| + c_2 \qquad c_1 - c_2 = \tilde{c}$$

$$\ln|Z| = -\lambda_0 t + \tilde{c} \ , \quad Z = \pm e^{\tilde{c}} e^{-\lambda_0 t}$$

$$\tilde{c}_1 = 0, \pm e^{\tilde{c}} \in \mathbb{R}$$

$$Z = \tilde{c}_1(t) e^{-\lambda_0 t}$$

מבטלים למשוואה

$$\tilde{c}_1' e^{-\lambda_0 t} + \underbrace{\tilde{c}_1\left(-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\right) + \lambda_0 \tilde{c}_1 e^{-\lambda_0 t}}_{=0} = \mu$$

$$\tilde{c}_1' = \mu e^{\lambda_0 t} \Rightarrow \tilde{c}_1 = \frac{\mu}{\lambda_0} e^{\lambda_0 t} + c \quad \left(= \int \mu e^{\lambda_0 t} dt\right)$$

$$\boxed{Z = \tilde{c}_1 e^{-\lambda_0 t} = \frac{\mu}{\lambda_0} + c e^{-\lambda_0 t}}$$

$$N = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda_0} + c e^{-\lambda_0 t}} \ , \quad \underline{\underline{N=0}}$$

ג) א' הגבלה!

$$\frac{1}{N(2020)} = \frac{\mu}{\lambda_0} + C e^{-\lambda_0 \cdot 2020} \quad , N(2020) \approx 10^{10}$$

$$10^{-10} = \underbrace{5 \cdot 10^{-13}}_{\text{זניח}} + C e^{-40.4}$$

(17)

$$C \cong e^{40} \cdot 10^{-10} \cong 23 \cdot 10^{6}$$

$$N(t) = \frac{1}{5 \cdot 10^{-13} + 2.3 \cdot 10^{7} e^{-0.02t}}$$

$$N(t) \to 0.2 \cdot 10^{13} = 2 \cdot 10^{12}$$ ויר מגו"...

משוואות מדויקות

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad , \quad M,N \in C$$ כאשר ... רציפות

נקראת **מדויקת** אם קיימת פונקציה $f(x,y)$ גזירה ברציפות אשר מקיימת

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$ דיפרנציאל שלם

$$M = f'_x(x,y), \quad N = f'_y(x,y)$$ כלו' אומרת

אז מקבלים

$$df = 0$$

פתרון כללי $\boxed{f(x,y) = C}$ $C = const \in \mathbb{R}$

הנוסחא מכילה גם $y = y(x)$ וגם $x = x(y)$

ידוע שאם f גזירה ברציפות פעמיים ($f \in C^2$ כלומר) אזי

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

(18)
דוגמא

$$\underbrace{2xy\,dx + \overset{(x^2+1)}{?}dy}_{} = 0$$

$$d(x^2y + y) = 0 \qquad (x^2y+y)'_x = 2xy$$

$$(x^2y+y)'_y = x^2+1$$

$f(x,y) = \boxed{x^2y + y = C}$ הפתרון

ואכן $f''_{xy} = (2xy)'_y = 2x = (x^2+1)'_x = f''_{yx}$

$f'_x dx + f'_y dy = 0$ [הכתב פורמלי!]

אם $f'_y(x,y) \neq 0 \Leftarrow$ קיימת פונקציה $y = y(x)$, $dy = y'dx$

$0 = f'_x + f'_y y' = [f(x,y(x))]'_x$ (משפט על פונקציה סתומה)

קיימת $\Leftarrow f'_x \neq 0$ $x = x(y)$, $dx = x'_y dy$

$0 = f'_x x'_y + f'_y = [f(x(y),y)]'_y \implies f(x,y(x)) = c$ או $f(x(y),y) = c$

משפט (תנאי לכך ערך הפתרון)

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, $M,N \in C^1$ רציפות נגזרות

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \iff \text{מדויקת}$$

בסביבה

$df = Mdx + Ndy$ כך $f \in C^2$

הוכחה וצריך הפתרון

1. אם מדויקת, מש"ק $\Leftarrow df = 0$

הפתרון $f(x,y) = const$

$M'_y = f''_{xy} = f''_{yx} = N'_x$

$$M'_y = N'_x$$

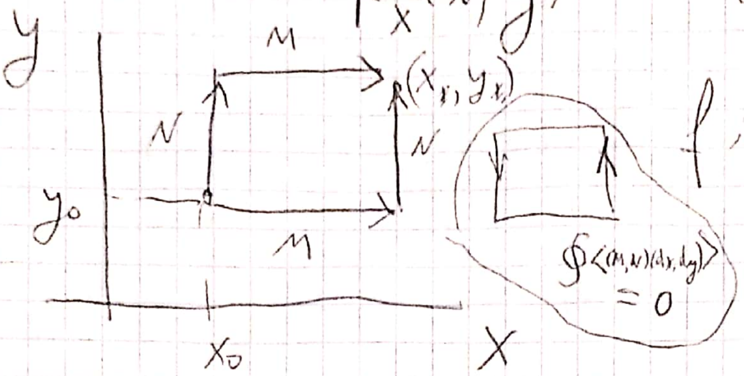
2. נניח

נניח ש $f(x,y)$, כך ש $f'_x = M,\ f'_y = N$

ואז צ"ל מצאנו

$$f'_x(x,y) = M(x,y)$$

$\oint M dx + N dy = \iint (M'_y - N'_x)\,dx\,dy = 0$



בונים פונקציה f עד אשר נגזרה

לפי x, $y = const$

לפי y, $x = const$

$$f(x,y_0) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx + \underbrace{C(y_0)}_{y_0}$$

לכל y_0 יהיה ערך קבוע אחר

$$x = x_0 \Rightarrow C(y_0) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{קבוע שרירותי}} = \tilde{C}$$

$$N(x,y_0) = f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y_0) = \int_{x_0}^{x} M'_y(x,y_0)\,dx + C'(y_0)$$

$$C'(y_0) = N(x,y_0) - \int_{x_0}^{x} M'_y(x,y_0)\,dx = N(x,y_0) - \int_{x_0}^{x} N'_x(x,y_0)\,dx$$

$$C'(y_0) = N(x,y_0) - N(x,y_0) + N(x_0,y_0)$$

$$C(y) = C(y_0) + \int_{y_0}^{y} C'(y)\,dy = f(x_0,y_0) + \int_{y_0}^{y}\left[N(x,y) - \int_{x_0}^{x} M'_y(x,y_0)\,dx\right]dy$$

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\xi)\,d\xi + \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{שרי'}}$$

(19)

קבוע תלוי ב-y

$$f'_x(x,y) = M(x,y)$$

20

$$f(x,y) = \underbrace{\int M(x,y)\,dx}_{\Phi(x,y)} + \hat{C}(y)$$

פונקציה ראשונית – $\Phi(x,y)$, $\Phi'_x(x,y) = M(x,y)$

צריך למצוא $\hat{C}$ למשל $\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds$

$$N(x,y) = f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) + \hat{C}'(y)$$

$$\hat{C}(y) = \psi(y), \quad \psi(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)\right] dy$$

$+C$ ← לאפס

מספיק f אחת ולכן מספיק φ אחת

צריך: $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)$ תלויה רק ב-y בלבד

הוכחה:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)\right) =$$

$$= N'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)\,ds = N'_x(x,y) - M'_y(x,y) = 0$$

פתרון:

$$\boxed{\underbrace{\Phi(x,y) + \psi(y)}_{f(x,y)} = C}$$

מ.ש.ל.

דוגמא

21

$$2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)$$

$$f'(x) = 2xy \qquad f'_y = x^2-y^2 \qquad f = ?$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f = x^2y + \hat{c}(y) \Rightarrow f'_y = x^2 + \hat{c}'(y) \Rightarrow \hat{c}'(y) = -y^2$$

$$\hat{c} = -\frac{y^3}{3}$$

$$f(x,y) = \boxed{x^2y - \frac{y^3}{3} = c}$$

פתרון כללי

בסוגר

דוגמא

$$(x+y+1)\,dx + (x-y^2+3)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x-y^2+3)$$

משוואה
מדויקת

$$f'_x(x,y) = x+y+1 \qquad f'_y(x,y) = x-y^2+3$$

$$\Downarrow$$

$$f = \frac{x^2}{2} + xy + x + \hat{c}(y), \quad f'_y = x + \hat{c}'(y) \Rightarrow \hat{c}' = -y^2+3$$

$$\hat{c} = -\frac{y^3}{3} + 3y$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y = c}$$

פתרון
כללי

גורם אינטגרציה

משוואה, לא מדוייקת: (22)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M'_y \neq N'_x$$

מחפשים $\mu(x,y) \neq 0$ כך ש

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$ מדוייקת $\Leftarrow$

$$(\mu M)'_y = (\mu N)'_x$$

מד"ח $\mu M'_y + \mu'_y M = \mu N'_x + \mu'_x N$

לפעמים מצליחים לפתור אותה,

תרגיל מעניין (כמו היה לנו, בעצם, כאשר פתרון מד"ר Bernoully

דוגמא

$$x\,dx = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\,dy + y\,dx = d(xy)$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = d\sqrt{1+x^2}$$

פתרון כללי: $\boxed{\sqrt{1+x^2} - xy = C}$ משוואה!

הגדרה

פונקציה ~~...~~ שנשארת קבועה, $I(x,y(x)) = const$

על כל פתרון $y(x)$ של מד"ר

נקראת אינטגרל ראשון של מד"ר

במקרה פרטי של מעו"ר מסדר 1

(2.3) אינטגרל ראשון מספק גם

את הפתרון הכללי

למעו"ר מסדר n יש n אינטגרלים

ראשונים בלתי תלויים, עוד נראה

דוגמא

$$(x^2+y^2+y)\,dx - x\,dy = 0$$

$$(x^2+y^2)\,dx + y\,dx - x\,dy = 0$$

מציבים $d\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, פתרון $y \equiv 0$ $(y(x)\equiv 0)$ גם $x(y)\equiv 0$ פתרון

מסמנים $y=y(x)$, אז $dy = y'dx$, $dx=\Delta x$

מצמצמים ב

ומחלקים ב y , $y \neq 0$

$$1+\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)' = 0 \quad , \quad z=\frac{x}{y}$$

$$z' + 1 + z^2 = 0$$

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{z'}{1+z^2} = -1$$

מפרידים משתנים (מחלקים על $1+z^2$)

$$\operatorname{arctg} z + x = C$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + x = C \quad , \quad y=0}$$ פתרונות

$$\Downarrow$$

אפשר לבטא y $\quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg}(C-x)$ אם $C-x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ — תנאי מיותר

בצורה, עושה לפתרון מקרה, $X = X(y)$ (25)

$X \equiv 0$ - פתרון, שחלקים ב X^2

$dx = x' dy \quad , \quad d\frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

גזירה ב-y $\quad \left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)x' - \left(\frac{y}{x}\right)' = 0$

$$x' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\int x'\,dy = \int \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy$$

$$\boxed{X = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c \ , \ X \equiv 0 \text{ פתרון}}$$

פתרונים באפסין ש $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

מקבלים שהפתרון הוא

$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + x = c \ , \ y \neq 0$ או $\quad X(y) \equiv 0$ ו

$x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c \ , \ x \neq 0$ או $\quad y(x) \equiv 0$

אותו פתרון
עבור $x \neq 0, y \neq 0$

משוואות הומוגניות

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

נקראת הומוגנית אם קיים $s \in \mathbb{R}$
כך שלכל $k>0$ ולכל x,y

$$M(kx,ky) = k^s M(x,y), \quad N(kx,ky) = k^s N(x,y)$$

s נקרא סדר

דוגמאות

$s=2$ $\quad \left(x^2 + \frac{y^3}{x}\right)dx - xy\,dy = 0$

$s=1$ $\quad \left(x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)y\right)dx + (x+y)\,dy = 0$

$s=0$ $\quad \frac{y}{x}\,dx + dy = 0$

נניח $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{x^s}{x^s}\,\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

הרבה פעמים מגדירים משוואות הומוגניות ישירות בצורה כזו.

כי זה שקול למשוואה $dy - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0$, $s=0$

הצבה:

$$y' = (zx)' = z'x + z, \quad z = \frac{y}{x}$$

$$z'x + z = \varphi(z)$$

$$z'x = \varphi(z) - z$$

$$\frac{z'}{\varphi(z) - z} = \frac{1}{x}$$

$\varphi(z) = z$
$\Leftarrow$ פתרון $z = c_0, c_1, \ldots$

מפרידים משתנים

$\boxed{y^2dx+(x^2-xy)dy=0}$ $\Updownarrow$ $\delta=2$

מקום שמחפשים $y(x)$

דוגמא

(26)

$$y^2+x^2y'=xy\cdot y'$$

$$y^2+(x^2-xy)y'=0$$

מחלקים ב x^2

~~לא מוגדר ב 3~~

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=0$$

$\frac{y}{x}=1$ לא פתרון

$$y'=-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}}$$

$z=\frac{y}{x}$, $y=zx$

$$z'x+z=-\frac{z^2}{1-z}$$

$$z'x=\frac{z^2}{z-1}-z=\frac{z^2-z^2+z}{z-1}=\frac{z}{z-1}$$

$z=0$ פתרון

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)z'=\frac{z'(z-1)}{z}=\frac{1}{x}$$

$$\int\left(1-\frac{1}{z}\right)\underbrace{z'dx}_{dz}=\int\frac{dx}{x}$$

$$z-\ln|z|=\ln|x|+\hat{c}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right|e^z=|x|\cdot e^{\hat{c}} \qquad \tilde{c}=\pm e^{\hat{c}}$$

$\frac{1}{z}e^z=\tilde{c}x$, $\tilde{c}\neq0$; $z\equiv0$ פתרון

$\frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}=\tilde{c}x$, $\tilde{c}\neq0$; $y=0$

פתרונות

$\boxed{ce^{\frac{y}{x}}-y=0,\ c\in\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{e^{\frac{y}{x}}-\tilde{c}y=0,\ \underbrace{\tilde{c}\neq0}_{\text{מגוון}};\ y=0}$

$c=\frac{1}{\tilde{c}}$

דוגמא

$$(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$$

$y = zx,\ z = \frac{y}{x}$ $\quad s=1$ — משוואה הומוגנית

פתרון $X = x(y) \equiv 0$

$$(x+2zx)\,dx - x\,d(zx) = 0 \qquad d(zx) = z\,dx + x\,dz$$

$$(x+2zx-xz)\,dx - x^2\,dz = 0 \qquad /x$$

$$(x+zx)\,dx - x^2\,dz = 0$$

$$(1+z)\,dx - x\,dz = 0 \qquad \boxed{z(x) = -1 \ \text{פתר}}$$

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}$$

אינטגרציה לפי x

בשני האגפים

$dz = z'dx$

או לפי z
$x = x'dz$

$$\ln|1+z| = \ln|x| + c$$

$$1+z = \tilde{c}\,x, \quad \tilde{c} = \pm e^{c}, 0$$

$$\frac{y}{x} = \tilde{c}\,x - 1 \qquad \boxed{y = \tilde{c}x^2 - x,\ \tilde{c} \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{X(y) \equiv 0}$ וגם

בעיית קושי Couchy

($F(y', y, x) = 0$ או)

כאשר בעיה, בצורה

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

— תנאי התחלה

~~[illegible]~~

משפט של בעיית Couchy

אם תנאים פי [illegible]

מתקיים קיים פתרון

ואפילו רק אחד