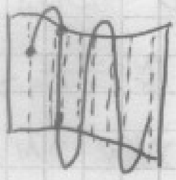
הרצאה

כמה הערות לפני שמתחילים. משהו על סכום מינקובסקי בשיעור הבא ומשהו קצת יותר חשוב.

שבוע שעבר אמרנו שגרף שעקום חוצה אותו, מתחלק ל-4 חלקים
גם זה לא מדויק, ייתכן מספר קבוע לאורך החציה,

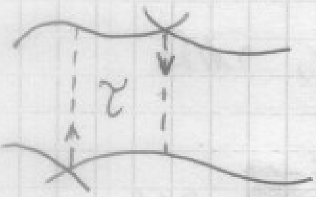


משהו כמו 16

בקיצור ניתן לקבל (25) ילדים, משהו כמו 45 לפי מיכה, ב-DAG.

נשארו לנו 2 דברים לבחון:

1) כמה טרפזים נוצרים, בתוחלת.
2) מה סכום המשקלים של טרפזים אלו, כאשר המשקל = # של הקשתות בעג"ד שיחצו את הטרפז. בעג"ד, כי השינוי העבר לא גורם את הטרפז.



כדי לתאר טרפז צריך לכל היותר 4 קשתות
נגיד ש-τ נוצר ע"י w עקומות אחרות.

(*) אם τ נוצר מאיפשהו שלב באלג', אז 4 העקומות המגדירות אותו הופיעו כבר עד שלב זה.

(*) כמו כן, כל עקום אחר החוצה את τ, עדיין לא התווסף.

~~אב~~ <u>אבל</u>, אם תנאים אלו מתקיימים, לא בהכרח τ "יוצר". כי ייתכן ש-τ לא יהיה שייך ל-face בו אנו מעוניינים.

בכל אופן, כדי ש-τ "יוצר", תנאים אלו חייבים להתקיים. בפרמוטציה רנדומית של $w+4$ עקומות, ההסתב' שהתנאי יתקיים:

$$\frac{4!\,w!}{(w+4)!}$$

שזה בערך, מסדר גודל של $O\left(\frac{1}{w^4}\right)$

כלומר אם w הוא גדול, הסבירות שנראה את הטרפז די נמוכה.

נעשה את האנליזה בדרך קצת שונה, שתשמש אותנו בעג"ד.

זהו חסם עליון. יכול להיות שאפילו W=0, נוח לפעמים הטרפז ג"כ להופיע, אבל זהו, שלו.

אם כן, האינדיקציה הקבע שונה:

⊛ τ טרפז כלשהו (fixed)

⊛ $X_{q,\tau}$ = τ הוא טרפז של הפירוק האנכי של f_q^* = של ה-face כלומר הכנסה של בדיוק q קשתות

⊛ $Z_{q,\tau}$ = τ הוא טרפז של f_i^* כלשהו, $0\le i\le q$

⊛ יותר מאוחר נצטרך גם $Y_{q,\tau}$.

טוב, אז ברור כי:

$$Z_{q,\tau}=\bigcup_{i=0}^{q} X_{i,\tau}$$

ונשים לב שברגע שטרפז נעלם, הוא כבר לא ישוב. כלומר ה-X-ים לא ממש דיסג'וינטים אבל מה שכן דיסג'וינטי:

$$\bar{X}_{q-1,\tau}\cap X_{q,\tau}$$

כלומר, τ נוצר בהכנסה של הקשת ה-q.

$$\Rightarrow Z_{q,\tau}=\bigcup_{i=0}^{q}\bar{X}_{i-1,\tau}\cap X_{i,\tau}$$

וזה ~~[illegible]~~ איחוד של קב' זרות.

⇐ תוחלת הטרפזים שנוצרו אי פעם =

$$=\sum_{\tau}P_r(Z_{n,\tau})$$

נעשה את הסכום למעשה, על כל τ = (על כל הרביעיות של קשתות (למרות שאולי טרפז מורכב מפחות קשתות חופשיות).

$$=\sum_{\tau}\sum_{i=0}^{n}P_r(\bar{X}_{i-1,\tau}\cap X_{i,\tau})=$$

$$=\sum_{\tau}\sum\underbrace{P_r(\bar{X}_{i-1,\tau}\mid X_{i,\tau})}_{\text{הקשת ה-i היא אחת מ-4 הקשתות המגדירות את } \tau}\cdot P_r(X_{i,\tau})=\sum_{i=0}\frac{4}{i}\underbrace{\sum_{\tau}P_r(X_{i,\tau})}$$

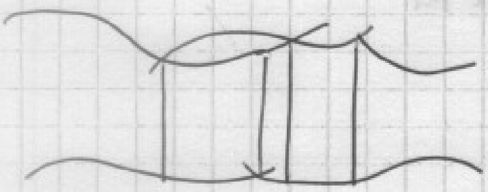
והסתברות לכך זה $\frac{4}{i}$

תוחלת כמות הטרפזים שיוצרים את הפאה f_i^*

זו בדיוק הסיבוכיות של Single Cell בהינתן i קשתות.

הסיבוכיות של f_i היא $O(\lambda_{s+2}(i))$

~~ואם כמות הרצפים~~ ואם כן סיבוכיות הגבול כמו גם כמות הרצפים:



כל ג'ונק (כל קדקוד) מגדיר
קו אנכי, והוא שייך לחלק כלשהוא
מהגבול...

$\Rightarrow$ כמות הרצפים ב-f_i^* היא $O(\lambda_{s+2}(i))$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{i}\cdot O(\lambda_{s+2}(i)) = O\left(\sum \frac{\lambda_{s+2}(i)}{i}\right) \le \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_{s+2}(n)}{n} = n\cdot \frac{\lambda_{s+2}(n)}{n} = O(\lambda_{s+2}$$

כעת, נוסיף את $\underline{Y_{q,\gimel}}$: ג הוא רצף של f_q^* ו-γ_{q+1} היא אחת הקשתות שמוכלות את ג.

$$\Rightarrow Pr(Y_{q,\gimel}) = \underbrace{Pr(\gamma_{q+1} \text{ is} \ldots \mid X_{q,\gimel})}_{\frac{W(\gimel)}{n-q}} \cdot Pr(X_{q,\gimel})$$

מס' חלקי כמות הקשתות שנותרו

נשים לב כי $Y_{q,\gimel} \subseteq X_{q,\gimel} \cap \overline{X_{q+1,\gimel}}$

שוב, זה לא בהכרח שוויון, כי יכול להיות ש-γ יוצא את ג אבל לא יחתוך אותו. אבל שוב, 2 המאורעות הם דיסג'וינטים. ברגע ש-ג נהרס בדרך כלשהי אז.

הוא לא חוזר

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{q}\sum_{\gimel} Pr(Y_{q,\gimel}) \le \sum_{\gimel}\sum_{i=1}^{q} Pr(X_{i,\gimel}\cap \overline{X_{i+1,\gimel}}) = \sum_{\gimel} Pr(\cup \cdots) \le \sum_{\gimel} Pr(Z_{q,\gimel}) = O(\lambda_{s+2}(q))$$

דיסג'וינטים
ומכיוון ש ~~ג...~~
היה ונהרס, זה איחוד
המאורעות

עד כה לכל q
או משהו

והגיעה העת לשלב את מה שקיבלנו:

$$\circledast \quad Pr(Y_{q,\gimel}) = \frac{W(\gimel)}{n-q} Pr(X_{q,\gimel})$$

$$\circledast \quad \sum_{\gimel}\sum_{i=1}^{q} Pr(Y_{i,\gimel}) \le O(\lambda_{s+2}(q))$$

ואנו מעוניינים ב-$\sum_{\gimel} W(\gimel) Pr(Z_{n,\gimel})$, וכמו קודם:

$$Pr(Z_{n,\gimel}) = \sum_{i=1}^{n} Pr(\overline{X_{i+1,\gimel}} \mid X_{i,\gimel}) Pr(X_{i,\gimel}) = \sum \frac{4}{i} Pr(X_{i,\gimel})$$

אפשר להכפיל ב-τ ב-2 האגפים, ונסכום על τ ונקבל:

$$\sum_{\tau} w(\tau)\Pr(Z_n,\tau) = \sum_{\tau}\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{i} w(\tau)\Pr(X_i,\tau) = \sum_{\tau}\sum_{i=1}^{n} 4\cdot\frac{n-i}{i}\cdot\frac{w(\tau)}{n-i}\Pr(X_i,\tau) =$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{i}\underbrace{\sum_{\tau}\Pr(Y_i,\tau)}_{\triangleq D_i}$$

אז אין לנו חסם על D_i אבל יש לנו חסם על סכום של D_i-ים מ-1 עד q:

$$\Rightarrow\quad 4\sum_{q=1}^{n}\frac{n-q}{q}D_q = \qquad \left(D_q \triangleq \underbrace{\sum_{i=1}^{q} D_i}_{E_q} - \underbrace{\sum_{i=1}^{q-1} D_i}_{E_{q-1}}\right)$$

$$= 4\sum_{q=1}^{n}\frac{n-q}{q}\left(E_q - E_{q-1}\right) =$$

$$= 4\sum\underbrace{\left[\frac{n-q}{q} - \frac{n-q-1}{q+1}\right]}_{\frac{n}{q}-\frac{n}{q+1}=\frac{n}{q(q+1)}}E_q = 4n\sum_{q=1}^{n}\frac{E_q}{q(q+1)} = O\left(n\sum_{q=1}^{n}\frac{\lambda_{s+2}(q)}{q(q+1)}\right) = O\left(n\cdot\frac{\lambda_{s+2}(n)}{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q}\right)$$

$$= O\left(\lambda_{s+2}(n)\log n\right)$$

בכלל, הסיבה שעשינו את כל העירוקים האלו, נובעת מכך שרק טרפזים שהם חלק מה-face, צריך להתחשב בהם, ולא יכולנו להשתמש פשוט בחסם העליון של $\frac{4}{w}$ או משהו, כי זה יהיה יקר מדי...

כעת, נדבר על חישוב כל ה-$A(\Gamma)$ (ולא רק Single Cell)

כרגיל, נניח כי הקשתות הן x-מונוטוניות וכו'

Γ: n קשתות כמו קודם.

מעוניינים לחשב את $A(\Gamma)$ כמפה מישורית, למשל DCEL.

נחשב את ה-Vertical Decomposition - הפירוק האנכי של $A(\Gamma)$.

(1) נשתמש באותו אלג' רנדומי אינקרמנטלי.

ועדכון הכל כנ"ל, אבל פה, אפשר "להרג" רק כאשר קשת חוצה אותו, כי אין כבר את הקטע שהוא לא שייך ל-face בו מעוניינים.

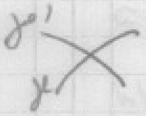
כעת גם מתקיים שוויון בתנאי שאמרנו קודם... כלומר אם ה
הקטעים מגיעים קודם אז בהכרח...

בכל אופן, פיתחנו שיטה לחישוב, אז הבה נשתמש בה לעת עתה ואולי אח"כ נראה גישה פשוטה יותר המנצלת את מה שכתבנו לפני רגע.

$$\Leftarrow \sum_{\sigma} Pr(X_{i,\sigma}) = O(i^2)$$

תוחלת הטרפזים לאחר i קשתות (בלי התנאי של ב- R_i^*)

בהנתן של- $A(\Gamma)$ יש k צמתים (קדקודים), $k=O(n^2)$ אבל אולי פחות), מה תוחלת כמות הקדקודים לאחר i קשתות ב- $A(\Gamma)$



כדי שיהיה נק' חיתוך בין ע ל- ע' צריך ששניהם יופיעו ב- i הקשתות הראשונות:

$$\frac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} \approx \frac{i^2}{n^2}$$

אז:

$$\Rightarrow O\Big(\underbrace{i}_{\text{כמות ה-endpoints}} + \underbrace{\frac{i^2}{n^2}k}_{\text{כמות ה-intersections}}\Big) \triangleq M_i$$

וגם כאן, כמות הטרפזים, היא בערך כמו כמות הקדקודים.
לכן, כמות הטרפזים שנוצרים:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(i+\frac{i^2}{n^2}k\right) = \sum_{i} 1+\left(\frac{k}{n^2}i\right) = O(n+k)$$

שזה נחמד.

ותוחלת "העבודה" שצריך לבצע = תוחלת סכום המשקלים:

$$\sum_q \frac{n}{q(q+1)}E_q = \sum_q \frac{n}{q(q+1)}\left[q+\frac{q^2}{n^2}k\right] = n\log n+k$$

שזה מגניב, ואפילו יותר טוב מ- sweep !!

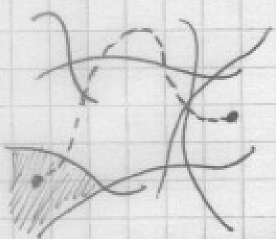
הרי זה ברור שצריך $n\log n$ כדי למיין, אז זה די אופטימלי! (למרות שזה בתוחלת...)

זו הייתה הגישה הרנדומית. עת, לדטרמ':

(2) הבנייה הדטרמיניסטית, גם היא תהיה אינקרמנטלית

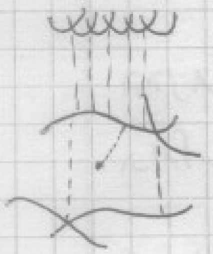
* נכניס את $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ כרגיל

* נמצא היכן ה-left endpoint של γ_{i+1} (בזמן $O(i)$), בלי DAG ובלי כלום. פשוט Brute Force



נמצא אילו 2 עקומות נמצאות ישירות מעל ומתחת מצמוד לנק'. נבנה את הטרפז.

ועושים את אותן מניפולציות טרפזים, הורסים, בונים וכו', וכל מה ששומרים זה את המפה המישורית, מפורקת לטרפזים, בלי שום מבני נתונים נוספים.



ברגע שעוברנו את הנק' והטרפז ממנו מתחילים, מוצאים בקלות את נק' היציאה מהטרפז ([illegible] זה לא בעיה), אבל כעת ייתכן שהשפה העליונה, נשענים עליה המון טרפזים, וצריך למצוא איכשהו את זה שנכנסים אליו.

האבחנה היא שכל הטרפזים שצריך לבנות הם ב-Zone של γ_{i+1} של $A(\Gamma_i)$. וזו הסיבה שהאלג' עובד. אני נותן טרפזים רק מספר קבוע של פעמים אם נממש את האלג' בזהירות.

ומה הסיבוכיות של כמות הטרפזים שבונים, מה הסיבוכיות של ה-Zone? ראינו כבר, אם הולכים בנק' האינוק, למעשה γ עובר את ה-faces דרכם הוא עובר.

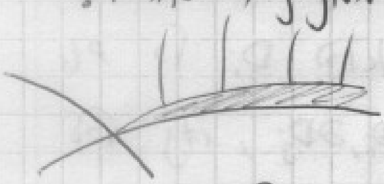
אז היות וסיבוכיות ה-Zone היא $O(\lambda_{s+2}(i))$ מקבלים שעלות האלג':

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{s+2}(i) \le \sum \lambda_{s+2}(n) = O(n\lambda_{s+2}(n))$$

שזה קצת מורכב. זה אפילו יותר מ-n^2, אבל זה נחמד כי זה פשוט וזה דטרמיניסטי, אבל אם k קטן, אז זה די פסים'.

אגב, הדבר הכי טריוויאלי שאפשר לעשות, שכאן נמנעים מהמיון הזה למצוא את n^2 החיתוכים, למיין אותם ($n^2 \log n^2$) ואז מתחילים לט"ל, ומכל פיגול... ניתן לסמן את המפה.

יש קומבינציה למצוא את הטרפזים שאנו מעוניינים בהם.

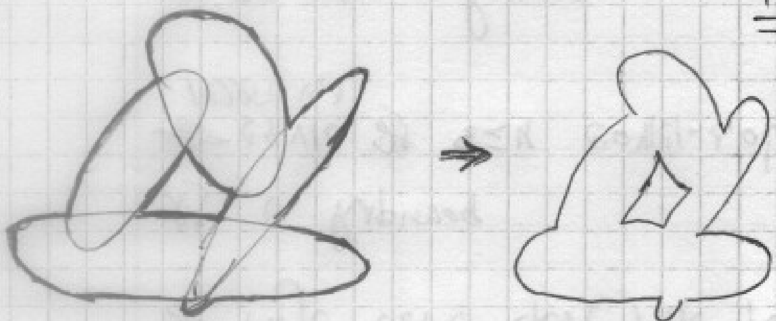


מנפחים את המקרה של הגג שממנו
יוצאים, והולכים לאורך עד לנק' החיתוך
משמאל, ואז חותכים ימינה, ובודקים אילו אפשריים לבנות.

ושוב, אנו כן שומרים את כל הטרפזים של כל face.

ועכשיו, למשהו אחר לגמרי!

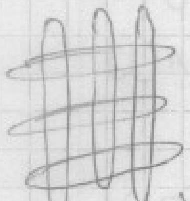
איחוד של פסאודו-דיסקים



נניח שיש לנו $C_1, \dots, C_n$ אובייקטים / אזורים
ונגדיר:
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

ו- ∂U הוא הגבול של U. לא נתעניין בקדקודים הפנימיים
והשימוש לרובוטיקה הוא ~~[illegible]~~ מיידי ← למשל, אם כל אלו אזורים אסורים
ומעוניינים במקומות בהם הרובוטים יכולים להמצא.
ורוצים לדעת את 2 השאלות הקבועות: מה סיבוכיות האזורים, וכיצד מחשבים.

במקרה הכללי, הסיבוכיות היא $\Theta(n^2)$, ודוגמה:



כל זוג גבולות נחתכים ב-4 נק'.

אבל מסתבר שלפעמים, ישנם חסמים יותר טובים.
למשל, כמו במקרה של פסאודו-דיסקים.

אך יש מקרה אפילו עוד יותר פשוט. איחוד של חצאי מישורים
← אז הוא חסום ע"י המעטפת התחתונה.

גם אם יש לנו פרבולות המגדירות את חצאי המישורים וכו'.

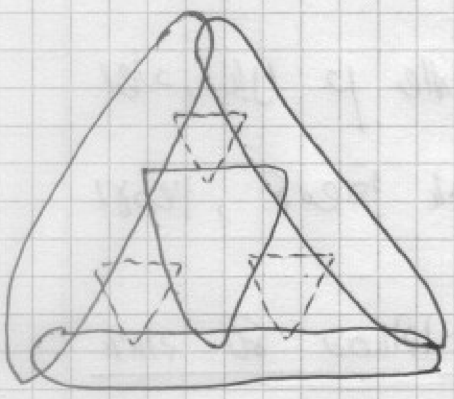
אז אם כל זוג גבולות נחתך ב-4 נק' ניתן ליצור מצב גרוע
כמו של $\Theta(n^2)$, אך אם רק ב-2 נק', אז נקבל משהו הרבה יותר
טוב. כמו במקרה של פסאודו-דיסקים (זה תמיד זוגי)

נגדיר D בתור אוסף הפסאודו-דיסקים $D=\{D_1, D_2, ... D_n\}$

אם כל D_i הוא Simply Connected bounded region

לכל $i\neq j$, $\partial D_i,\partial D_j$ נחתכים לכל היותר פעמיים.

נצייר ציור לפי הנתון:



עם 3 משולשים, מקבלים 6 קדקודים.

ואז עבור כל משולש נוסיף עוד 6.

ובסופו של דבר: $6n-12$ קדקודים

של איחוד ה- boundry.

והטענה היא:

האיחוד של $n\geq 3$ פסאודו-דיסקים יש לכל היותר $6n-12$ קדקודים על ה- boundry.

תחילה הייתה הוכחה מאוד מסובכת. כעת, יש הוכחה קלה ומעודה, משמעותית בכל ק' כבר.

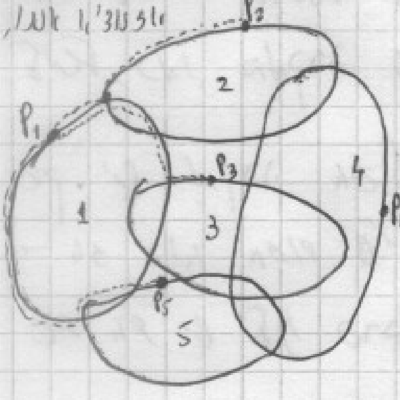
ההוכחה ע"י planarity. אפילו הנוסחה מזכירה זאת: $2(3n-6)$.

הוכחה:

נבנה גרף מישורי עם n קדקודים, אחד לכל D_i.

נניח שכל D_i מופיע על ∂U.

יתכן שלמשל כולם נוגעים אחד באחר, אז נוגעים אותו, ואז יהיה אפילו יותר.



נבחר לכל D_i נק' P_i על $\partial U\cap\partial D_i$

אם $\partial U\cap\partial D_i$ מכיל קדקוד של U

(או שניים), ניקח אחד מהם, נקרא

לו W_{ij} ונחבר P_i ל- P_j ע"י

קשת (edge) שנצייר מ- P_i ל- W_{ij}

על ∂D_i ואז מ- W_{ij} ל- P_j על ∂D_j.

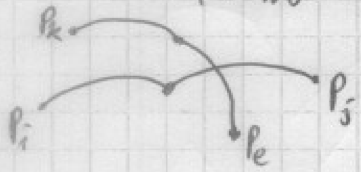
והטענה היא ש- G הוא פלנרי. (מישורי). ברגע שנראה זאת, סיימנו!

G מישורי ⟸ #edges ≤ 3n−6 ⟸ # vertices on $\partial U \le 2(3n-6)$

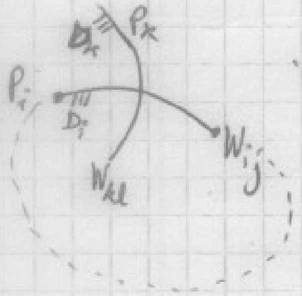
אולי הציור שלנו לא מושלם, אך בגדול הטענה היא:
כל זוג של קשתות של G שאין להם endpoint משותף, חוצים כמות זוגית של פעמים.

וזו משפט של Hanani-Tutte - ~~[illegible]~~ שאם הטענה מתקיימת, זה מספיק כדי ש-G יהיה מישורי. זה הכיוון הכבד.

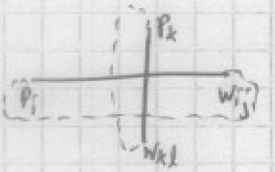
נשים לב שכל edge הוא איחוד של 2 "חצאי-קשתות", ואנו טוען שכל זוג של חצאי קשתות נחתך מספר זוגי של פעמים.
(בניגוד לציור משמאל)



אם כן, צריך להראות שחצאי קשתות לא יכולות להחתך רק פעם אחת.
נצייר מצב שבו זה כך (שב) ונראה שזה לא יתכן.



P_i, P_k הינן על ∂U וגם W_{ij}, וגם W_{kl} ולא ניתן לצייר כך שכל ה-endpoints יהיו מחוץ לדיסקים.



היות וגם P_i וגם W_{ij} חייבות להיות בחוץ, אבל אז יש 4 נק' חיתוך, וזה גם סותר.

וזהו. עם חנני-טוט מקבלים את מה שרצינו.