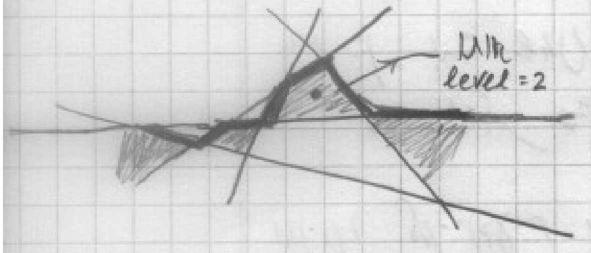
=> כמה תת קבוצות של k נק' יכולות להיות מופרדות ע"י קו.

תת קבוצה כזאת נקראת k-set

והבעיה נקראת k-set prob.



אם מסתכלים על ~~...~~ רמה של נק',

אז גם לכל הפאה יש את אותה רמה

וגם לישר התומך את הפאה, (ורק כמה נק' בדרך, יש ישר שם תומך)

וגם אפשר לעבור דרך המחלפים ולראות עוד פאות כאלו.

ראינו ~~...~~ פעם, שנוסעים מדרגה, והשאלה כמה פעמים נפנה.

ואם במקום ישרים יש פרבולות וכד', יודעים אפילו פחות.

<u>הרצאה</u>

ועם השימושים של קרוסינג ישר...

<u>מעטפת תחתונה של n סגמנטים (בעזרת CS)</u>

מה שבאמת רצה לעשות זה להשתמש בזה למימדים גבוהים, שבהם DS (לא יודע איך) ~~...~~ עובד.

נספור קדקדים.

$S = \{S_1, \dots S_n\}$

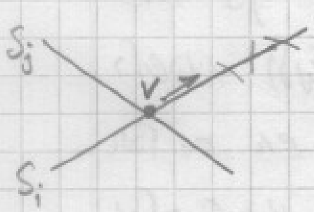
E_0 - המעטפת התחתונה. או $level_0$.

V_0 - הקדקדים של E_0. מעניינים רק בנק' חיתוך. קצוות של קטעים (שהן גם נק') לא מעניינות

וגם לא משפיעים על הסיבוכיות.

אם כן, כל חיתוך/קדקד מוגדר ע"י <u>2</u> קטעים.

נבנה נוסחת נסיגה (recurrence) ל- $V_0(n)$.



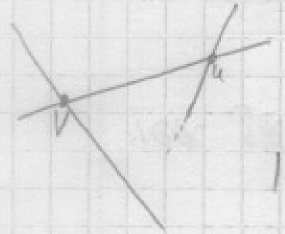
נלך מ-V ימינה (נתרחק מ- E_0). במקרה

המצוייר משמאל - נלך על S_i.

ואנו תוקפים (charge) את v לקדקודים אחרים לאורך s_i ברמה > 0.

מקבעים פרמטר כלשהו k, ויש 2 אפשרויות:

(1) אנו מוצאים לפחות k קדקודים של A(S) ברמות חיוביות (positive levels)
לפני שמגיעים ל-E_0 ולפני שאנו עוברים מעל נק' קצה של קטע כלשהו.
זה המקרה הטוב.
אז אנו charge את v ל-k הראשונים שאנו פוגשים.
מה אנו יודעים עליהם?

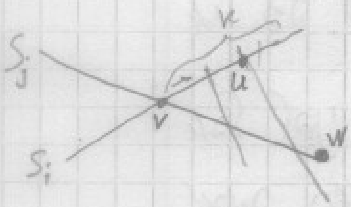


מה שמשמאל זה מצב בלתי אפשרי, כי הקו שפוגשים
לא ייתכן כי או שיש לו נק' קצה בין v ל-u או
ש-v לא במעטפת התחתונה.
כי הבנייה שבנינו רק לקטעים, ולא גמישים לעקומות.

אז אנו יודעים שה-level (רמה) של k הנק' שפוגשים הינם $1,2,..,k$

ואם אנו במקרה כללי אז ה-level הוא לכל היותר k.

(2) אנו עוברים מעל נק' קצה לפני שמוצאים k נק' חיתוך.



אנו יודעים שנק' הקצה של s_j הינה ברמה לכל
היותר k, מאותה סיבה כמו קודם.
לכן w (נק' הקצה) הינה לכל היותר ברמה k.
ואנו charge את v ל-w.

נשים לב שה-charging במקרה (1) הינו unique.

מהדברים הנ"ל שאנו תוקפים "מלמטה" אנו עולים ברמה.
אם אתם נותנים u, אנו יודעים בדיוק מהו ה-v שתקף אותו

לכן: $\boxed{V_0(S) \le \frac{1}{k} V_{\le k}(S) + 2kn}$

אז כמה נק' יכולו לתקוף את נק' הקצה w? זה לא יכול לקרות יותר מפי
ומיכה לא נתן הוכחה מפורשת אבל אמר שזה לכל היותר k. וזה קצת
היגיוני. אם עולים מעל w יותר מ-k רמות והולכים לאורך הישר, אז נעבור יותר מ-k נק' חיתוך עד w

אבל איך פותרים את משוואת הנסיגה?

נעזר בקלרקסון-שור:

$$V_{\le k}(S)\le O\left(k^2 V_0\left(\frac{n}{k}\right)\right)$$

נכתוב למשל $Ck^2V_0(\frac{n}{k})$ אותו:

$$V_0(S)\le CkV_0\left(\frac{n}{k}\right)+2kn$$

וזה קצת יותר קל, וקרוב ללינארי. זה נכון לכל S ש-$|S|=n$ של נק':

$$V_0(n)\le CkV_0\left(\frac{n}{k}\right)+2kn$$

$$\Longrightarrow\quad V_0(n)\le A_\varepsilon n^{1+\varepsilon}\quad \forall\varepsilon>0$$

אפשר לוודא את זה ע"י אינדוקציה:

$$A_\varepsilon Ck\left(\frac{n}{k}\right)^{1+\varepsilon}+2kn=A_\varepsilon C\frac{n^{1+\varepsilon}}{k^\varepsilon}+2kn$$

אז נתון ε, ונבחר $k^\varepsilon=2C$ ואז נוכל לחסום את ע"י $A_\varepsilon n^{1+\varepsilon}$

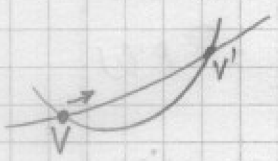
$$\longrightarrow\quad A_\varepsilon n^{1+\varepsilon}\frac{C}{k^\varepsilon}+2kn\overset{?}{\le}A_\varepsilon n^{1+\varepsilon}$$

האם $2kn<\frac{1}{2}A_\varepsilon n^{1+\varepsilon}$? נבחר $A_\varepsilon=4k$ ואז כל חלק קטן מחצי ממה שרוצים

אם כן, עבדנו קשה כדי לקבל חסם פחות טוב ממה שהיה לנו קודם, אבל את זה אפשר להרחיב למימדים גבוהים יותר.

אבל לפני זה, נשים לב שהאנליזה נכונה גם לעקומות יותר כלליות, חוץ מכמה קשיים טכניים.

אז אם קודם אספנו קודקודים "רדודים" עד שהגענו לנק' קצה, כעת עם עקומות:



יש בעיה עם זה ש-v רואה את v'. ויש דרך לעקוף את זה.

אם v ו-v' הינם נק' חיתוך של אותן ע',ע'.

נשים לב שזה קורה רק כשמתחילים מ-v שהוא השמאלי מבין נק' החיתוך.

אז לכל זוג ע',ע', התורמים בנק' $V_1,V_2,\dots V_s$, נותן לכל נק' אינדקס השווה לכמה נק' ~~#~~ נמצאות מימינה:

$$\underset{s-1}{\overset{\downarrow}{V_1}},\ \overset{\downarrow}{\dots}\ \overset{\downarrow}{\dots}\ \overset{\downarrow}{\dots},\ \underset{0}{\overset{\downarrow}{V_s}}$$

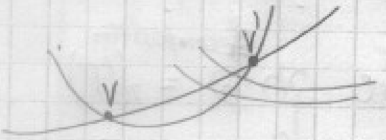
כעת ~~[illegible]~~ גם נוסחת הנסיגה משתנה לפעמיים האיבר הראשון, כי אולי נקפיץ פעמיים את אותו k שוב:

$$V_0(s) \le \frac{2}{k} V_{\le k}(s) + 2kn$$

~~[illegible]~~ אם כן, המקרה השלישי הוא

(3) v נוקף את אחיו (sibling) מימין v'. ל-v' יש אינדקס יותר קטן. במקרה הכללי ב-1.

והוא גם ברמה של היותר k.



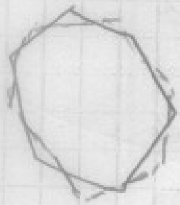
נגדיר $V_0^{(j)}(s) = \#$ הצמתים של E_0 עם אינדקס $\le j$.

$$\Rightarrow V_0^{(j)}(s) \le \frac{2}{k_j} V_{\le k_j}(s) + 2k_j n + V_{\le k_j}^{(j-1)}(s)$$

וצריך לעבוד יותר קשה כדי לבחור את ה-k_j-ים. הראשונים הכי גדולים... אבל לבסוף מקבלים את ה-$A_\varepsilon n^{1-\varepsilon}$ הרצוי.

מערכים במימדים גבוהים

יכולים להיות מקרים די קיצוניים. למשל אם יש לנו איזשהו מישור שהוא תחום ע"י פוליגון, ומעליו עוד אחד רק קצת מסובב.



במקרה כזה, במעטפת התחתונה יכולים להיות מספר עצום של רכיבים.

בקיצור, לא נרצה להתעסק עם בעיות טופולוגיות וכאלה לגבי מה שקורה.

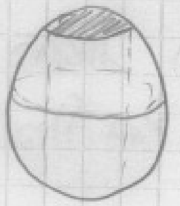
נדבר לעת עתה (או ברוב הזמן) ב-3 מימדים

יש לנו אוסף Γ של n משטחים surfaces.

נניח שהמשטחים הם אלגבריים (או חצי-אלגבריים) בעלי סיבוכיות תיאור-

Constant description Complexity כלומר קבוע הגודל של מערכת משוואות (ואולי אי-שוויונות) לגבי

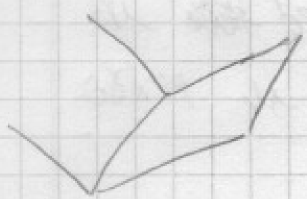
אפשר להגדיר כיפה:



$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$x^2+y^2 \le \frac{1}{2}$$

$$z \ge 0$$

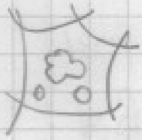


wedge

ואם נרצה למשל פרפר שכזה, נצטרך
2 מישורים, ואיזה דק של הישר המחבר
ביניהם...

נניח בכל אופן, שפשוט הכל מתנהג היטב.
המערך מוגדר כמו במישור:

decomposition
$A(\Gamma)$ = פירוק של $\mathbb{R}^3$ לאיזורים מקס' קשירים פתוחים יחסית (cells) ממימד
0,1,2,3. כל אחד מוכל בתוך תת קבוצה של Γ ממימד 3,2,1,0
ו- disjoint מכל שאר המשטחים (surfaces).



אז למשל במערך של כדורים, זה יכול להיות די מורכב
והוא יהיה רכיב הקשירות המקס'..

נניח שכל שלישייה של משטחים נחתכת בלכל היותר 2 נק'.
אגב 3 ספירות נחתכות לכל היותר ב-3 נק'!
3 זוג אליפסואידים נחתכים " ב-8 נק'.

זה שימוש במשפט Bézout שאומר שצריך להעלות במכפלת המימ'. משהו כזה.

אגב הגבולות של משטחים (שלמשל בו"ים מאי שוויוניים) גם יהיו אלגבראיים.
בקיצור הכל אלגבראי ומתנהג באופן חביב למדי.
ונגיע ממעטפות.

מעטפת תחתונה

נניח שהמשטחים ב-Γ הינם xy-מונוטוניים. כמו terrain. אנו עפים מעליו
כל פעם שמתחתינו יש נק' אחת.
ספירות יחולקו ל-2 חלקים. למרות שהחלק העליון לא יעניין אותנו לעולם לגבי
המעטפת התחתונה.
ובכלל, תמיד נפרק את החלקים העליונים ונקבל איזו משהו אלגבראי עם סיבוכיות קבועה.

נסתכל על
הגרפים של פונק' Total/partial :

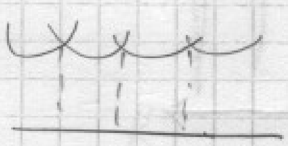
$$Z = f_1(x,y), f_2(x,y), \ldots, f_n(x,y)$$

(במקרה שהמשטח מיוצג חלקית)

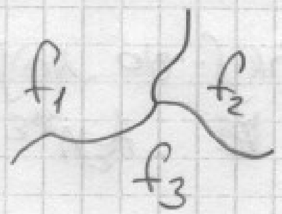
נגדיר:

$$E(x,y) = \min_i f_i(x,y)$$

כאן, אם אנו מטילים (project) את הגרף של E על מישור xy, אנו מקבלים מפה מישורית.



בחד-מימד זה היה קל
ולבדוק היה קל לממש...



כאן יש לנו:
באזור המפגש יכולות
להיות כו' מסובכות.

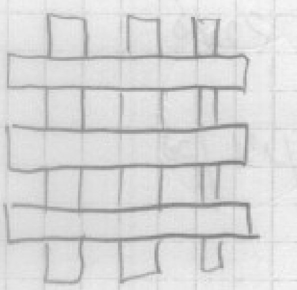
על כל פ-פאה של המפה, E מקבל ע"י פונק' יחידה.

קבלנו עצם דיסקרטי יותר, שלכל ~~צלע~~ פאה/ מבנה יש שם. יש n גאויות.
ולא כל כך יודעים מהם המאפיינים הקומבינטוריים של הגרף, ע"צ ביטוי של הגרף
היינו רוצים לדעת כמה קודקודים יש למפה הזאת (אז נדע גם כמה פאות).

יודעים ~~...~~ למשל שאם נעביר קו, אז לאורך הקו תהיה התנהגות של DS

לא ברור איך לבטא את העובדה שכל זוג פונק' נפגשות
ב-s נק'.

יודעים שאני לא מצפים לסיבוכיות לינארית.
~~...~~ סיבוכיות קרובה לריבועית קל לבנות.
קל לראות שאין מנוס ~~...~~ מריבועיות (n^2).

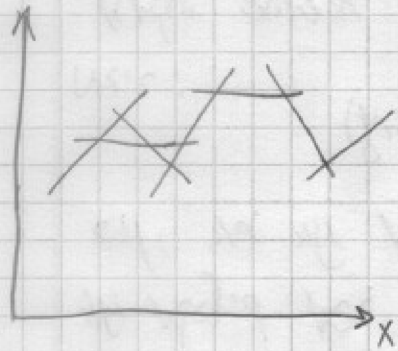


אם ניקח למשל מלבנים המסודרים ב-grid. חצי מאונכים חצי
מאוזנים. ואפילו אין צו' גינוק כי המלבנים (המאונכים) גדולים להיות
מעליהם.
ואפשר גם לקחת משטחים אחרים או חצאי גלילים ובאותו סגנון...

ואפשר אפילו יותר. הנה בניה המשיגה $(n/2)^2 n$ (כלומר מקבלים $\Omega((n/2)^2 n)$:

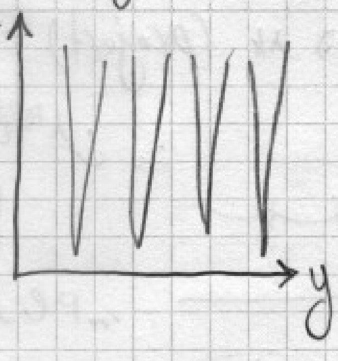
ניקח $\frac{n}{2}$ קווים במישור zx, כך שלמשטח התחתון שלהם יש $\Omega((n/2)^2)$ קודקודים

ומושכים את הקווים בכיוון y כך שיהפכו למלבנים



ועכשיו לוקחים עוד $\frac{n}{2}$ פרפרים (wedges)

מאוד צרים



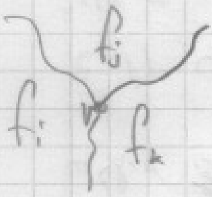
לכן מקבלים התנהגות סופר-לינארית. אם נרצה את מה שעשינו

קודם מקבלים $A_\varepsilon n^{2+\varepsilon}$. $\forall\varepsilon$

נתחיל מ- $f_1,\dots,f_n$ $F=$ פונקציה מוגדרת באופן מלא.

נגדיר $V_0(F)$ = # של קודקודים = חיתוכים של שלשה של מישורים.

נניח שכל שלשה נחתכת בלכל היותר 3 נק'.



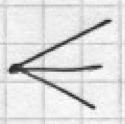
המעטפת, קרוב לקודקוד v שהוא חיתוך f_i,f_j,f_k

נראית כמו משמאל

תמיד יהיה צלע (edge) אחד של החיתוך שיוצא מ- v והולך ימינה

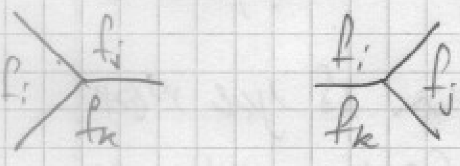
" " " " " " " " והולך שמאלה.

כלומר



זה בלתי אפשרי.

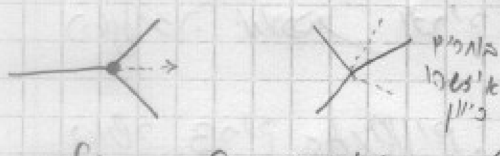
זה רק כך



לסיכום כי מספיק קרוב ל- v, כלומר אחד מה- f-ים מתנהג כמו מישור.

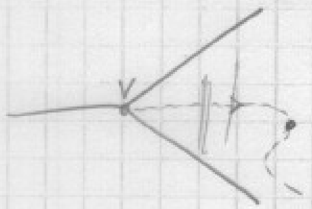
לכן ניתן לעשות משהו דומה למה שעשינו ב-2D.

נלך מ-v ימינה בכיוון x+, כשאנו מתרחקים מהמעטפת התחתונה, ומוסיפים קדקדים של רמות זוגיות.



נקבע את k-פרמטר.

(1) מוסיפים k קדקדים לתוך היער, לפני שמגיעים ל-E ולפני שהעקומה בה אנו הולכים פונה שמאלה. באותו רגע, נעצור.



מאותה סיבה כל ~~...~~ שפוגשים (ה-k הראשונים הינם) ברמה $\geq k$
כי הרמה משתנה רק כשחוצים משהו שעובר מתחתינו...

זה המקרה הטוב. ממנו מקבלים: $V_0(S) \leq \frac{2}{k} V_{\leq k}(S)$

והרי $V_{\leq k}(S)$ לפי CS: $O(k^3 V_0(\frac{n}{k}))$.

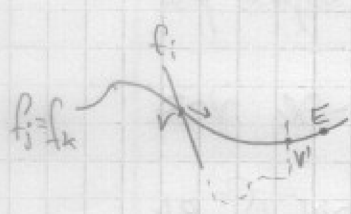
ואם פותרים את זה מקבלים $A_\varepsilon n^{2+\varepsilon}$.

מיכה אומר שזה גם מה שקורה בכל מימד. ב-d מימדים נוסחת הנסיגה (d ~~...~~ יוצרים (זמנים) נק', $d-1$ יוצרים edge (ובמימד אחד החק ימינה)) מקבלות:

$$V_0(S) \leq \frac{d-1}{k} V_{\leq k}(S) \leq (d-1) c k^{d-1} V_0\left(\frac{n}{k}\right) \Rightarrow V_0(S) \leq A_\varepsilon n^{d-1+\varepsilon}$$

אבל יש עוד מקרים, אם אין לנו מזל. אם העקום פונה שמאלה, או שמגיעים ל-E

(2) מגיעים ל-E לפני שאספנו k נק'.



לכן, בהכרח נמצא עוד נק' חיתוך של אותה שלישייה f_k, f_j, f_i

v' נמצא מימין ל-v $\Leftarrow$ אינדקס יותר קטן ושם הוא ברמה $\geq k$.

אם כן, אנו מוסיפים לנוסחת הנסיגה:

$$V_0^{(j)}(S) \leq Ck^2 V_0\left(\frac{n}{k}\right) + \sum_{i=0}^{3} V_{\leq k}^{(j-1)}(S) \quad + \quad \text{\# של קדקדים עם אינדקס } \geq j$$

מיכה מסביר שאלו היו לנו רק 2 נק' חיתוך, אז זה היה הרבה יותר פשוט ולא היינו צריכים את כל ה-$V_{\leq k}^{(j-1)}$ וכו'. לא כזה הקשבתי לצערי. אז שפשוט לא הבנתי.

לפי C-S מקבלים $3ck^3 V_0^{(i-1)}(\frac{n}{k})$

האנליזה מורכבת, וצריך לעשות אותה מאוד בזהירות, ובסוף מקבלים $A_\varepsilon n^{2+\varepsilon}$

כאשר צריך A_ε-ים שונים:

ובוחרים k-ים שונים.

$$V_0^{(0)}(n) \le A_\varepsilon^{(0)} n^{2+\varepsilon}$$

$$V_0^{(1)}(n) \le A_\varepsilon^{(1)} n^{2+\varepsilon}$$

$$\vdots$$

$$V_0^{(1)}(n) \le 3ck^3 V_0\left(\frac{n}{k}\right)$$

$$\underbrace{3ck^{1-\varepsilon} A_\varepsilon^{(0)}}_{A_\varepsilon^{(1)}} n^{2+\varepsilon}$$

ורואים שכל A_ε תלוי ב A_ε קודם וכו'...

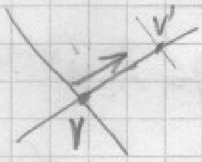
לא נעשה את זה כאן.

(3) כשהעקום פונה שמאלה - זה, קודם ימינה קל - יש n^2 סה"כ נק' כאלו

כי זה חיתוך של 2 משולשים. אפשר לעשות להם charge ל-∞ או משהו.

נעבור לרגע למישור, למספר גמור של קווים.

ונבחר $k=1$.



או שמוצאים קודקוד, או שלא, ב-charging.

אם מוצאים אז: charge v to v' at level 1

ולכן במקרה זה:

$$V_0(S) \le V_1(S) + ?$$

ברור שה-charging הוא יחודי (unique)

אם לא מוצאים:

עוברים מעל נק' קצה שמאלית או

מעל נק' הקצה הימנית של אחד מהקטעים של ההצלבות.

$$\Rightarrow \quad V_0(S) \le V_1(S) + n$$

טוב, הבה ננסה לעשות אנליזת C-S קצת יותר מדויקת לרמה 1.

שם בחרנו דגימה אקראית. כאן נבחר דגימה אקראית R של n-1 קטעים

של S: $R = S \setminus \{s\}$

בוחרים באקראי

ישנם 2 מקרים. או שהקדקד הנ"ל ברמה 0, ההסתב': $\frac{n-2}{n}$ וזה $V_0(S)$

גובהו 1- ההסתב': $\frac{1}{n}$ וזה $V_1(S)$

$$\Rightarrow E[V_0(R)] = \frac{n-2}{n}V_0(S) + \frac{1}{n}V_1(S) \geq \frac{n-2}{n}V_0(S) + \frac{1}{n}V_0(S) - 1$$

$$V_0(S) \leq V_1(S) + n$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0(n-1) \geq \frac{n-1}{n}V_0(n) - 1}$$

ובצורה אחרת:

$$\frac{V_0(n)}{n} \leq \frac{V_0(n-1)}{n-1} + \frac{1}{n-1}$$

וזה שוב נוסחת נסיגה לפתור. זה טור טלסקופי.

$$\Rightarrow \frac{V_0(n)}{n} \leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} + \frac{V_0(1)}{1} = O(\log n)$$

$$\Rightarrow V_0(n) = O(n\log n)$$

זו טכניקה הודות לבחור טגנסקי', שהדגים בעזרת הדרך הזו למצוא כמה חסמים ללא שום ε (משהו מלפני 25 שנה באוניברסיטה).