גיאומטריה חישובית - רעיונות לפתרון תרגיל בית מס' 1.

שימו לב: הרעיונות המובאים כאן אינם פתרונות מלאים ואינם כוללים הוכחת נכונות, יש להתייחס אליהם כאל דרך/רעיון לפתרון בלבד. מצופה שתדעו להפוך רעיונות אלה לפתרונות פורמליים.

1. א. ניתן להניח שהקמור נתון בסדר ממוין לפי כיוון השעון/נגד כיוון השעון, לכן נוכל לפצל לקמור עליון וקמור תחתוון, ולכל קמור עליון/תחתון להשתמש בשני עצי חיפוש בינאריים ממוינים לפי קואורידנטות ה- של הנקודות.

נחפש ע"י חיפוש בינארי את קואורדינטת ה- של בקמור העליון. אם היא נמצאת בין שתי נקודות בקמור העליון, אזי נבדוק אם נמצאת מתחת לקמור העליון (ע"י בדיקת פניה ימינה של ). אם כן, נעשה בדיקה דומה עבור הקמור התחתון, אם היא נמצאת בין שתי נקודות , נבדוק האם נמצאת מעל הצלע . אם כן נחזיר "כן". אחרת "לא".

ב. נבדוק אם נמצאת על הקטע , אם כן נחזיר "כן". אחרת, נבדוק מאיזה שני צדדים של הישר נמצאת (נניח בה"כ בחצי העליון). נבדוק אם הקטע נחתך עם אחת משתי הצלעות של שבחצי העליון. אם לא, נחזיר "כן". אם נחתך עם אחת מהן נמשיך לבדוק את 2 הצלעות הרלוונטיות של וכך הלאה. בכל שלב נבדוק לכל היותר 2 חיתוכים בזמן קבוע, וסה"כ שלבים.

**2)** נתחזק שני עצים בינאריים לקמור העליון והתחתון לפי קואורדינטות . נסביר את העדכון לקמור העליון , לקמור התחתון העדכון מתבצע באופן דומה.

בהינתן הנקודות אחת אחרי השניה:
עבור הקמור הוא , עבור הקמור הוא , עבור הקמור הוא המשולש שהן מגדירות. נסמן את הקמור אחרי המתקבל אחרי נקודות ב- .

עבור :

1. אם משמאל/מימין ל- נעדכן את ב- ו- להיות הקודקוד הראשון/האחרון בהתאמה.
2. אם מעל עדכן את .
3. אם מתחת ל- עדכן את .
4. הוא הקמור המיוצג ע"י ו- .

עדכון :

נסמן ב את קודקודי הנמצאים משמאל ל- ביחס לסדר הממוין בעץ של . כלומר הסדר לפי ציר ה- הוא . באופן דומה נסמן את קודודי הנמצאים מימין ל- ב- . כלומר הסדר הוא .

כל עוד יש לפחות קודקודים משאמל ל- וגם היא פניה שמאלה:
 א. נוציא את מ- .
 ב. נעדכן ו- .

כל עוד יש לפחות קודקודים מימין ל- וגם היא פניה שמאלה:
 א. נוציא את מ- .
 ב. נעדכן ו- .

סיבוכיות: מיקום יחסית ל (משמאל / מימין / מעל / מתחת), כולל מציאת הנקודות הסמוכות, לוקחת זמן . כמו כן, כל הוספה או הסרה מהעצים לוקחת . אם נסתכל על שלב אחד של הוספת קודקוד ייתכן ונצטרך למחוק קודקודים בעדכון של , אך נשים לב שכל נקודה נוספת או נמחקת מהעץ לכל היותר פעם אחת, ולכן סה"כ הפעולות שמבצע האלגוריתם הוא .

בעיה נפוצה: הרבה סטודנטים תיארו אלגוריתם בו בהינתן נקודה הם מחפשים את "נקודות התמך" של שני הישרים התומכים לקמור העוברים ב- ע"י "חיפוש בינארי". אכן אלו הן הנקודות שצריך לחברם ל בעדכון הקמור והרעיון נכון, אך מציאתן ע"י חיפוש בינארי הוא לא טריוויאלי כלל (ואף מאתגר), מה שדורש עוד פרטים והסברים לא מעטים. מי שמתעניין לראות כיצד ניתן לבנות כזה אלגוריתם, ובפרט, לבצע חיפוש בינארי שכזה מוזמן לפתוח את הספר של Preparata and Shamos בפרק Dynamic Convex Hullשמתחיל בעמוד 111. החלק בו מוסבר איך לבצע חיפוש בינארי ע"מ למצוא את נקודות התמך נמצא בעמודים 113-117.

**3)** נשים לב: ישר מפריד את הקבוצה אם"ם חותך את הקמור של . לכן נחשב ונשמור את , כמו כן, נחשב ונשמור את דיאגרמת הנורמלים של , במערך ממוין זוויתית A (עם מצביעים לקשתות הקמור). כעת, בהניתן ישר נבצע חיפוש בינארי עבור שני כיווני הנורמלים שלו במערך A. עבור כל כיוון, נמצא את שתי קשתות הקמור העוקבות אשר הוא נמצא ביניהן, נסמן את הקודקודים המשותפים החלים בהן ב- *. קודקודים אלו הם קודקודי "התמך" של בקמור. כלומר, אם נזיז את הישר בכיוון אחד הנורמלים שלו עד אשר כולו יהיה מחוץ לקמור ואז נזיז אותו חזרה לכיוון הנורמל השני שלו, הקודקוד הראשון שהוא "יתקע" בו יהיה* או  *(שימו לב: ייתכן ויש שתי נקודות כאלה עבור צד מסוים במידה ויש צלע של הקמור המקבילה לישר, במקרה כזה פשוט נבחר אחת מהן). כעת נבדוק אם נמצאים בשני צדדים שונים של הישר (ראינו מס' דרכים לעשות זאת). אם כן, אזי מפריד את S. אחרת, לא מפריד. הנקודה הרחוקה ביותר מ- היא* או *. עבור אחת מהן, אם נזיז את הישר לכיוון הנורמל אותו חיפשנו כדי למצוא אותה, זו תהיה הנקודה האחרונה בקמור שהישר "יתקע" בה.

סיבוכיות: עיבוד מוקדם- בניית הקמור, דיאגרמת הנורמלים (והמערך A) – סה"כ זמן ו- מקום. זמן שאילתא- שני חיפושים בינאריים עולים . בדיקה אם הנקודות נמצאות מצדדים שונים של הישר לוקחת זמן קבוע. סה"כ .*

**4)** *א. הגישה הפשוטה מסתמכת על כך שאם קיים ישר מפריד בין זוג המצולעים, הוא יכול להיות מוזז ומסובב כך שכיוונו יהיה מקביל לאחת הצלעות של המצולעים (משהו שצריך להוכיח). כעת, על מנת לבחון האם קיים ישר מפריד יש לעבור על כל כיווני הצלעות בדיאגרמות הנורמלים, ולכל אחד כזה, למצוא את הקדקדים באותו כיוון ובכיוונים הנגדיים בדיאגרמות הנורמלים ההפוכות) ולהטיל את הקדקדים על אותו הכיוון* (*כלומר הכיוון הנורמלי לצלע*). *אם מתקבלים 2 קטעים זרים, אזי ישנו ישר מפריד והמצולעים אינם נחתכים. אחרת, ממשיכים לבדוק עד שמיצינו את כל הכיוונים האפשריים.*

*ב. ע"י מיזוג רשימות הקודקודים בקמורים העליונים והתחתונים מתקבלת רשימה של* O(n) *אינטרוולים בציר x שבהם הצלע העליונה והתחתונה של כל אחד מהמצולעים קבועות, ולכן קל לחשב את חיתוכם בסטריפ מעל קטע זה בזמן קבוע.*

*ג. כמו בסעיף א' רק שכעת צריך לבדוק את גודל החפיפה. המרחק המינימלי המתקבל הינו ההזזה המינימלית על מנת להפריד בין המצולעים (כדאי להסביר בעזרת משפט פיתגורס שהזזות כיוונים אחרים יהיו פחות כדאיות).*

***5)*** *א.* צורת הקמור היא קווים משיקים בין דיסקים, כאשר בין שני קווים משיקים על אותו דיסק, הקמור ממשיך על גבי שפת הדיסק.
דיאגרמת הנורמלים של הקמור היא כמו דיאגרמת הנורמלים לקמור של נקודות מרכזי הדיסקים.
כדי לחשב את הקמור , ניתן לחשב את את הקמור של מרכזי הדיסקים ואז להסיט את הצלעות יחידות בכיוון הנורמל (הפונה "החוצה" מ ), ומחברים 2 צלעות שמשיקות לאותו הדיסק באמצעות החלק המתאים של שפת הדיסק.

ב. דומה ל- א', רק שהפעם (בניגוד ל- א') דיסק יכול לתרום לקמור יותר מקשת-מעגל אחת. כמו כן, הקמור של מרכזי הדיסקים לא בהכרח "דומה" לקמור של הדיסקים.

 את החסם ניתן להוכיח ע"י בניה אינדוקטיבית (או אינדוקציה) של הקמור כך שבכל צעד מוסיפים לקמור דיסק, וסדר ההכנסה הוא בסדר יורד לפי אורכי הרדיוסים. הוספה של דיסק בעל רדיוס לא גדול יותר מכל אחד מהדיסקים שכבר בקמור, תתרום לכל היותר 2 צלעות (ישרות) לקמור (יש להוכיח).