<u>פתרון (מקוצר) לתרגיל מס' 3 באופטימיזציה גאומטרית</u>

*** הפתרונות המוצגים כאן נועדו לתת קווים מנחים לפתרון, אם כי הם בכל זאת מפורטים במידת מה. יש לציין כי במבחן או בהגשה של תרגיל, לעיתים יש לפרט/לנמק מעט יותר.**

1. קל לראות שהמינימום מתקבל עבור $x_1=1, x_2=1,\ldots,x_d=1$ ושהבסיס מורכב מאילוצים מהסוג $x_i \geq 1$.
כיצד פועלת basis(B, h)? נניח שקראנו ל-SUBEX עם סט האילוצים H^+ בתור בסיס התחלתי, אז בכל פעם שתתבצע קריאה ל-basis(B, h) עם אילוץ מהסוג $x_i \geq 1$, נחליף את $x_i \geq 0$ ב- $x_i \geq 1$. basis(B, h) לא תיקרא עם אילוצים מהסוג $x_i \leq 2$ כיוון שאילוצים אלו לא יופרו ע"י הבסיס שחושב בקריאה הראשונה ל-SUBEX .
המימד הנסתר הוא מס' האילוצים מהצורה $x_i \geq 1$ שב-G\B. כיוון שאילוץ מהסוג $x_i \geq 1$ לא ייצא מהבסיס מהרגע שהוא חושב פנימה, המימד הנסתר יכול רק לרדת.

2. (a) ניצור אילוץ עבור כל קדקוד מ-P ומ-Q, נגדיר את w באופן הבא:
$w(P, Q)=(d_{min}, x_1,..,x_d)$ כאשר d_{min} הוא המרחק המינימלי בין נקודה מ-P לנקודה מ-Q ו- $x_1,..,x_d$ הן הקואורדינטות המינימליות בסדר לקסיקוגרפי של הנקודה על P המשיגה את המרחק המינימלי יחד עם נקודה כלשהי מ-Q, או של נקודה בחיתוך. המרחק בין זוג נקודות מאותו פיאון יהיה ∞.
מתקיימת מונוטוניות כיוון שכאשר מוסיפים אילוץ ערך w יכול רק לרדת. (על מנת להוכיח באופן פורמלי, אפשר להגדיר את w כך שהוא יוכל רק לגדול, כלומר לשנות את הסימן של הרכיב הראשון).
מתקיימת לוקליות כיוון שהפתרון w הוא יחיד (יש להוכיח באופן פורמלי).
גודל הבסיס הוא לכל היותר d+2 (זה מתקבל אם יש חיתוך בין הפוליטופים. אם ידוע שהפוליטופים לא נחתכים אז גודל הבסיס הוא לכל היותר d+1).
גודל הבסיס יכול להיות קטן מ-d+2 (או מ- d+1) ולכן הבעיה אינה רגולרית-בסיס.

(b) ניצור אילוץ עבור כל נקודת קלט. נגדיר את w להיות $w(P)=(a, x_1,..,x_4)$ כך ש- a אורך קטע מינימלי כך ש-P יכולה להיות מכוסה ע"י 4 קטעים באורך a, ו- $(x_1,..,x_4)$ היא רביעיה מינימאלית בסדר הלקסיקוגרפי של נקודות הקצה השמאליות של 4 קטעים באורך a המכסים את P.
יש להראות ש-P ניתנת לכיסוי ע"י 4 קטעים באורך a אמ"ם כל 5 נקודות מ-P ניתנות לכיסוי ע"י 4 קטעים כאלה. כיוון אחד הוא ברור. כיוון שני אפשר להוכיח ע"י מיקום הקטע הראשון באורך a כך שנקודת הקצה השמאלית ביותר שלו היא הנקודה p_1 השמאלית ביותר ב-P, מיקום הקטע השני כך שנקודת הקצה השמאלית ביותר שלו היא הנקודה p_2 השמאלית ביותר שהקטע הראשון לא כיסה וכן הלאה, אם הקטע האחרון מכסה את הנקודה p_5 הימנית ביותר מ-P אז P יכולה להיות מכוסה ע"י 4 קטעים באורך a. לכן אם ניתן לכסות את $p_1,\ldots,p_5$ ע"י 4 קטעים באורך a, אז P יכולה להיות מכוסה ע"י 4 קטעים כאלו. לכן אם ניתן לכסות כל 5 נקודות מ-P (בפרט, את $p_1,\ldots,p_5$) ע"י 4 קטעים באורך a, אז ניתן לכסות את P ע"י 4 קטעים באורך a.
<- המימד הקומבינטורי של הבעיה הוא 5.
גודל הבסיס הוא בדיוק 5 (אחרת אפשר להקטין את הקטעים) ולכן הבעיה רגולרית-בסיס.
מתקיימת מונוטוניות כיוון שאם מוסיפים אילוץ ערך w יכול רק לגדול.
מתקיימת לוקליות כיוון שהפתרון w הוא יחיד (יש להוכיח באופן פורמלי).

3. אם קיים ישר אופקי או אנכי החותך את כל המלבנים, ולא ניתן לדקור את המלבנים על ידי 3 נקודות, אז קיימים 4 קטעי חיתוך זרים על הישר, כלומר קיימים בין 4 ל-8 מלבנים שאי אפשר לדקור ע"י 3 נקודות.

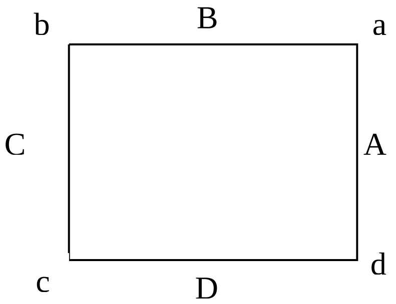
אם אין ישר אופקי או אנכי החותך את כל המלבנים, נגדיר מלבן R כמו שראינו בשיעור, כך שצלעות המלבן נבנות מהצלע התחתונה הכי גבוהה, מהצלע העליונה הכי נמוכה, מהצלע השמאלית הימנית ביותר ומהצלע הימנית השמאלית ביותר (המלבן נוצר מחיתוך הצלעות האלו).

ראינו בשיעור שאם אפשר לדקור את קבוצת המלבנים ע"י שלוש נקודות אז הדקירה מתבצעת או:

(i) ע"י שתי פינות נגדיות של R ונקודה שלישית המוכלת בו,

או, (ii) ע"י פינה אחת של R ושתי נקודות על הצלעות של R שאינן סמוכות לפינה.

נסמן את קדקודי המלבן וצלעותיו כפי שמתואר באיור. בנוסף, נסמן ב-S את הקבוצה שמכילה את ארבעה מלבני הקלט שיצרו את R.



נשים לב כי אם כל זוג מלבנים נחתך, אז לכל המלבנים יש חיתוך לא ריק. לכן, כיוון שלא ניתן לדקור את המלבנים ע"י 3 נקודות, ע"פ (i), קיימים שני מלבנים זרים מבין אלו ש- a, c ונקודה שלישית בתוך R לא דוקרות. נסמן את קבוצת שני המלבנים ב-S_{ac}. אז לא ניתן לדקור את $S \cup S_{ac}$ ע"י a, c ונקודה שלישית כלשהי. באופן דומה נגדיר את S_{bd}.

כעת יש שני מקרים:

(1) אם קיים מלבן 'R שאינו חותך אף צלע של R, אז לא ניתן לדקור את $S \cup S_{ac} \cup S_{bd} \cup \{R'\}$ ע"י שלוש נקודות. (לא ניתן לבצע דקירה מסוג (i) בגלל $S_{ac} \cup S_{bd}$, ולא ניתן לבצע דקירה מסוג (ii) כיוון שאז בהכרח לא נדקור את 'R.) קיבלנו קבוצה של 9 מלבנים שלא ניתן לדקור ע"י שלוש נקודות.

(2) אם כל המלבנים חותכים את צלעות R, נסמן ב-R_{b+} את המלבן עם הצלע התחתונה הגבוהה ביותר מבין המלבנים שחותכים את C ולא מכילים את a. באופן דומה, נסמן ב-R_{d-} את המלבן עם הצלע השמאלית הימנית ביותר מבין אלו שחותכים את D ולא מכילים את a. נסמן ב-p את הנקודה התחתונה ביותר בחיתוך של R_{b+} עם C (אם זו הנקודה c, אז ניקח נקודה מעט מעליה). באופן דומה, נסמן ב-'p את הנקודה השמאלית ביותר בחיתוך של R_{d-} עם D. כיוון שלא ניתן לדקור את קבוצת המלבנים עם שלושת הנקודות 'a, p, p, קיים מלבן R_c שלא מכיל אף אחת מהנקודות האלה. נסמן $S_a = \{R_{b+}, R_{d-}, R_c\}$. נשים לב שלא ניתן לדקור את $S \cup S_a$ ע"י a, נקודה על הצלע C, ונקודה על הצלע D. נגדיר באופן דומה את הקבוצות S_b, S_c, ו-S_d.

נניח שקיים מלבן "R אשר חותך צלע של R אך אינו מכיל אף אחד מקדקודיו. נניח בה"כ ש-"R חותך את הצלע C. נשים לב שלא ניתן לדקור את $S \cup S_{ac} \cup S_{bd} \cup S_a \cup S_b \cup \{R''\}$ על ידי שלוש נקודות. (לא ניתן לבצע דקירה מסוג (i) בגלל $S_{ac} \cup S_{bd}$, ולא ניתן לבצע דקירה מסוג (ii) בגלל $S_a \cup S_b \cup \{R''\}$.) קיבלנו קבוצה של 15 מלבנים שלא ניתן לדקור ע"י שלוש נקודות.

נותרנו רק עם המקרה בו כל אחד מהמלבנים מכיל לפחות אחת מהנקודות a, b, c, d. במקרה זה לא ניתן לדקור את $S \cup S_{ac} \cup S_{bd} \cup S_a \cup S_b$ ע"י שלוש נקודות. זה ברור לגבי דקירה מסוג (ii), כיוון שפסלנו את ארבעת המקרים האפשריים שלה. נותר להראות מדוע לא ניתן לדקור את הקבוצה על ידי a, c ונקודה שלישית כלשהי (או המקרה הסימטרי של b, d ונקודה שלישית). כיוון שלא ניתן לדקור את כל המלבנים על ידי 3 נקודות, קיים מלבן אשר מכיל רק את הקדקוד b של R, ומלבן נוסף אשר מכיל רק את הקדקוד d של R (אחרת היה ניתן לדקור את כל המלבנים בעזרת שלושה קדקודים של R). לכן, המלבן R_b שנמצא בקבוצה S_d מכיל גם הוא רק את הנקודה b (מבין ארבעת קדקודי המלבן). באופן דומה, המלבן R_d שנמצא בקבוצה S_b מכיל רק את הנקודה d. נשים לב שאם קיימת נקודה q אשר דוקרת את R_b ואת R_d, אז ניתן לדקור את כל המלבנים על ידי a,c,q. כלומר, שני המלבנים האלו אינם נחתכים, ולכן לא ניתן לדקור את $S \cup \{R_d, R_b\}$ על ידי a, c ונקודה שלישית.

לסיכום, במקרה זה קיבלנו קבוצה של 16 מלבנים שלא ניתן לדקור ע"י שלוש נקודות.

4. א. כפי שראינו בכיתה בעיית הדקירה שמוצגת בשאלה (עבור ריבועים) שקולה לבעיית ההכרעה: בהינתן קבוצת נקודות P וערך $0<d$, האם קיימים p ריבועים בגודל d שמכסים את P.
נשים לב שבפתרון האופטימלי גודל הריבועים שווה למרחק אופקי או אנכי בין שתי נקודות קלט.
נשתמש בשתי מטריצות מונוטוניות – אחת עבור מרחקים אופקיים ואחת עבור מרחקים אנכיים. עבור מטריצת המרחקים האופקיים נסדר את שורות המטריצה לפי ערכי x יורדים ואת עמודות המטריצה לפי ערכי x עולים, כאשר בתא m_{ij} של המטריצה כתוב הערך של x_i-x_j. המטריצה מונוטונית – ערכיה לא גדלים בשורות ובעמודות ולכן אפשר להשתמש בשיטה לחיפוש במטריצות מונוטוניות. (באופן דומה נסדר את מטריצת המרחקים האנכיים.)

ב. כפי שכולכם כנראה שמתם לב ניתן למצוא את הפתרון במאמר של chan.
יש לשים לב לפרטים הבאים שלא מצוינים במאמר:

- כדי לפתור את הבעיה, chan פותר גרסה מוכללת של הבעיה: בהינתן קבוצה R של n מלבנים, למצוא p ריבועים בגודל d שמכסים את R. יש לתרגם בעיה זו לבעיית הדקירה שמוצגת בשאלה: עבור כל מלבן r ב-R שאורכי צלעותיו a ו-b, נבנה מלבן חדש שאורכי צלעותיו הם d-a ו- d-b ומרכזו במרכז r ונבדוק האם ניתן לדקור את קבוצת המלבנים החדשה ע"י p נקודות. (ניתן לראות שאורכי הצלעות החדשים צריכים להיות d-a ו- d-b ע"י מירכוז 4 ריבועים באורך צלע d בפינות המלבן r. יש לדקור את המלבן החדש שנוצר במרכז r ואורכי צלעותיו d-a ו-d-b).
- כדי שניתן יהיה לפתור את הבעיה עבור p=2,3 בזמן ליניארי, כאשר מציירים ישר אנכי בכל פעם שעוברים n/5p נקודות יש להשתמש באלגוריתם ל- distance selection הדומה לחישוב חציון ולא במיון.