

מבחן במבוא לקומבינטוריקה ולתורת הגרפים

סמסטר ב' התשע"ה, מועד א'

תאריך: 26.6.2015

מרצה: פרופ' נוגה אלון

מתרגלת: גל קרונוברג

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבון.
- במבחן חמש שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על ארבע מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן. יש להקפיד ולרשום את מספר הסטודנט על טופס הבחינה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1

מהו מספר הסדרות x_1, x_2, \dots, x_{4n} שבהן $x_i \in \{\pm 1\}$ לכל i ומתקיים:

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = \sum_{i=1}^{4n} x_i = 0$$

וכן לכל $1 \leq j < 2n$ מתקיים $\sum_{i=1}^j x_i > 0$, וכן לכל $2n \leq j \leq 4n$ מתקיים $\sum_{i=1}^j x_j \geq 0$?

תשובה:

הוכחה:

כל הזכויות שמורות ©

מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 2

מהו מספר השלמים x , $1 \leq x \leq 10^9$, כאשר x אינו מתחלק ב-100, אינו מתחלק ב-125 ואינו מתחלק ב-8?

(כלומר, חשבו את גודל הקבוצה: $S = \{x \mid 1 \leq x \leq 10^9, x \in \mathbb{Z}, 100 \nmid x, 125 \nmid x, 8 \nmid x\}$.)

תשובה:

הוכחה:

כל הזכויות שמורות ©

מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 3

הסדרה $(a_n)_{n \geq 0}$ מקיימת את נוסחת הנסיגה: $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ לכל $n \geq 3$ וידוע כי $a_5 = 31, a_3 = 13, a_1 = 3$. מצאו ביטוי מפורש ל- a_n .

תשובה:

הוכחה:

כל הזכויות שמורות ©
 מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 4

מצאו פונקציה יוצרת לסדרה $(a_k)_{k \geq 0}$ הנתונה ע"י $a_0 = a_1 = 0$, ו- $a_k = (-1)^k \frac{1}{k(k-1)}$ לכל $k \geq 2$.

תשובה:

הוכחה:

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 5

הוכיחו כי קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ יש שני גרפים לא איזומורפיים G_1, G_2 , כשכל G_i הוא בעל $2n$ צמתים ו- n^2 קשתות ולכל $k, 1 \leq k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, מספר המסילות הפשוטות (מסלולים) באורך k של G_1 שווה למספר המסילות הפשוטות (מסלולים) באורך k של G_2 .

הוכחה:

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____:



מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____:

