

## מבחן במבוא לקומבינטוריקה ולתורת הגרפים

סמסטר ב' התשע"א, מועד ב'

**תאריך:** 14.8.2011

**מרצה:** פרופ' נוגה אלון

**מתרגל:** פלג מיכאלי

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבון.
- במבחן חמש שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על ארבע מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטייטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן. יש להקפיד ולרשום את מספר הסטודנט על טופס הבחינה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".

**בהצלחה!**

	1
	2
	3
	4
	5

## שאלה 1

הוכיחו כי לכל  $n \geq 1$  שלם,

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

הוכחה:

## שאלה 2

עבור  $n \geq 1$  שלם, מהו מספר הסדרות באורך  $n$  מהאלפבית  $\{0, 1, 2\}$  שסכום איבריהן זוגי, ויש בהן לפחות מופע אחד של 0? מצאו נוסחא סגורה למספר זה.

תשובה:

הוכחה:

**שאלה 3**

יהא  $n$  שלם חיובי ויהא  $N > n^3$  שלם. הוכיחו כי כל סדרה של  $N$  ממשיים כוללת או תת סדרה עולה ממש באורך  $n + 1$ , או תת סדרה יורדת ממש באורך  $n + 1$ , או תת סדרה באורך  $n + 1$  שלכל איבריה אותו ערך.

הראו גם כי תוצאה זו הנה הדוקה; כלומר, תארו סדרה באורך  $n^3$  ללא תת סדרות כאלו.

הוכחה:

דוגמה המראה כי התוצאה הדוקה:

**שאלה 4**

נסמן ב- $a_n$  את מספר הפתרונות למשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = n$ , שבהם  $x_i$  שלם אי שלילי לכל  $1 \leq i \leq 20$  וכן  $x_i \in \{0, 1\}$  לכל  $i \in \{1, 2\}$ ,  $x_3 \in \{1, 3\}$  ו- $x_4$  מתחלק ב-4.

(א) מהי הפונקציה היוצרת של הסדרה  $a_n$ ?

תשובה:

הוכחה:

(ב) מהו  $a_{2011}$ ? (רשמו תשובה מפורשת)

תשובה:

הוכחה:

**שאלה 5**

יהא  $G = (V, E)$  גרף כאשר  $V = X \cup A \cup B$  ו- $X, A, B$  קבוצות בלתי תלויות זרות בזוגות. נניח כי  $|X| = 63, |A| = |B| = 9$ , לכל  $v \in A \cup B$  מתקיים  $d(v) = 7$ , ולכל  $u \in X$  יש בדיוק שכן אחד ב- $A$  ושכן אחד ב- $B$ . הוכיחו כי קיימת  $Y \subset X, |Y| = 9$ , כך שלכל  $v \in A \cup B$  קיים  $y \in Y$  עבורו  $\{v, y\} \in E$ .

הוכחה:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר \_\_\_\_\_:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר \_\_\_\_\_: