

מבחן בקורס: מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים

מרצה: פרופסור נוגה אלון

סמסטר ב', תשע"ג, מועד א'.

28.06.2013

- משך הבחינה: 3 שעות.
- חומר עזר, לרבות מחשבוני, אסור.
- בבחינה יש 5 שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות על 4 שאלות (לא משנה אילו) יזכו אתכם ב90 נקודות. תשובות נכונות על כולן יזכו ב100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים, ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטה בלבד, אך יש למסרה.
- יש להקפיד לרשום מס' תעודת זהות ומס' מחברת בחינה על כל אחד מדפי הבחינה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

שאלה 1:

מצאו ביטוי סגור עבור $a_n = \sum_{k=0}^n k^2 2^{n-k}$.

תשובה סופית:

פתרון מלא:

שאלה 2:

תהינה $(a_i)_{i=1}^{2n}$ ו- $(b_i)_{i=1}^{2n}$ שתי סדרות באורך $2n$ של מספרים שלמים כך שלכל $1 \leq i \leq 2n$ מתקיים: $1 \leq a_i, b_i \leq n$.

הוכיחו כי קיימות שתי תת-קבוצות לא ריקות של אינדקסים $I, J \subseteq \{1, \dots, 2n\}$ עבורן מתקיים:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$$

פתרון:

שאלה 3:

חשבו את מס' הסדרות a_1, \dots, a_{2013} המקיימות:

- א. $a_i \in \{-1, 1\}$ לכל i ,
ב. $\sum_{i=1}^{2013} a_i = 5$ וגם
ג. $\sum_{i=1}^j a_i > 0$ לכל $1 \leq j \leq 2013$.

תשובה סופית:

פתרון מלא:

שאלה 4:

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ כך שרכיביה הם כל המספרים $1, 2, \dots, n^2$ (כל מספר מופיע בדיוק פעם אחת).

חשבו את מספר המטריצות B מסדר $n \times n$, שרכיביהן הם כל המספרים $1, \dots, n^2$ ושאינן מכילות אף שורה שזהה לאיזושהי שורה של A .

תשובה סופית:

פתרון מלא:

שאלה 5:

יהי $G = (V, E)$ גרף על $|V| = n$ צמתים. ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. נניח כי דרגתו של כל צומת $v \in V$ הינה לפחות \sqrt{n} . הוכיחו כי ב- G יש משולש או מעגל באורך 4.

ב. נניח כי דרגתו של כל צומת הינה לפחות $\sqrt{n} + 1$. הוכיחו כי ב- G יש מעגל באורך 4.

פתרון סעיף א':

מס' מחברת: _____

ת"ז: _____

פתרון סעיף ב':

מס' מחברת: _____

ת"ז: _____

מסגרת "חירום":

מס' מחברת: _____

ת"ז: _____

מסגרת "חירום":

A large empty rectangular box with a thin black border, occupying most of the page. It is intended for the user to write the details of the emergency situation.