

0366-3/43

20.06.2011

בחינה - גיאומטריה לא אוקלידית, מועד א'

סמסטר ב' תשע"א, אוניברסיטת תל אביב

מרצה: ד"ר ירון אוסטרובר

משך הבחינה הוא כשלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר. יש לנסח במדויק כל משפט או טענה מהכיתה בה הנכם משתמשים. כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם. שימו לב, במבחן ניתן לצבור 110 נקודות אבל הציון הסופי היא המינימום בין 100 וסה"כ כל הנקודות שצברתם.

חלק א': הוכיחו שתיים מתוך שלושת הטענות הבאות - 45 נקודות(א) במשולש היפרבולי מתקיים: $Area(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ (ב) (נוסחת אוילר) בפאון קמור מתקיים: $V-E+F=2$

(ג) (משפט פאפוס) בהנתן שלוש נקודות A, B, C על ישר במישור הפרויקטיבי, ושלוש נקודות A', B', C' על ישר אחר במישור הפרויקטיבי, אזי הנקודות

$$C'' = AB' \cap A'B, \quad A'' = BC' \cap B'C, \quad B'' = C'A \cap CA'$$

נמצאות כולן על ישר אחד.

חלק ב': הוכיחו שתיים מתוך שלושת הטענות הבאות - 45 נקודות

(ד) לא קיימת איזומטריה לוקלית בין המישור ההיפרבולי למישור האוקלידי.

(ה) תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ הנתונה על ידי $f(v) = Av$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הראו ש f הינה איזומטריה של $\mathbb{R}^3$ המקיימת $f(s^2) = s^2$.
 כמו כן, תארו במדויק את f כאיזומטריה של הספירה (שיקוף, סיבוב, גלישה וכו') וחשבו את הפרמטרים המתאימים.

(ו) הגדירו אינברסיה במישור ("שיקוף ביחס למעגל") והוכיחו שאינברסיה מעבירה מעגלים למעגלים.

חלק ג': הוכיחו אחת מתוך שתי הטענות הבאות - 20 נקודות

ז) מצאו איזומטריה של חצי המישור העליון המעבירה את הנקודות $a = 5 + 3i$, $p = 4 + 4i$ לציר המדומה וחשבו בעזרתה את המרחק בין הנקודות הנ"ל.

ח) בגיאומטריה ספרית, מצא את הרדיוס של הדיסק המקסימלי המוכל במשולש ספרי שווה צלעות עם שטח $\frac{\pi}{2}$. ניתן להשתמש בעובדה שמרכז הדיסק הנ"ל נמצא בנקודת מפגש חוצי הזוויות.

בהצלחה