- דף תרגיל 1 -

1. קבע האם הטענות הבאות הן טאוטולוגיות, סתירות או לא ולא (אין צורך להוכיח).
   א. אם מספר שלם מתחלק ב2 וב6 אזי הוא מתחלק ב12
   ב. אם מספר שלם מתחלק ב4 וב3 אזי הוא מתחלק ב12
   ג. אם מספר שלם הוא ריבוע של מספר שלם אחר אזי ספרת האחדות שלו היא 1.
   ד. אם מספר שלם הוא ריבוע של מספר שלם אחר אזי ספרת האחדות שלו היא 2.
   ה. אם 18 מתחלק ב2 וב4 אזי הוא מתחלק ב6.
   ו. אם 1=2 אזי 100 הוא המספר השלם הגדול ביותר.

2. הוכיחו כי הטענות הבאות נכונות:
   א. $(A \land (A \to B)) \to B$
   ב. $((A \to B) \land (B \to C) \land (C \to A)) \to (C \leftrightarrow A))$
   ג. $((A \to B) \land (B \to C) \land (C \to A)) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow A) \land (C \leftrightarrow A))$
   [היעזרו ב-**ב**.]

הערה: טענה א' נקראת מודוס פוננדו פוננס והיא נחשבת לבסיס תורת ההיסק, טענה ג' משמשת לעיתים קרובות לקיצור הוכחות של שקילות.

3. האם הטענות הבאות נכונות?
   א. $(A \land \neg B) \leftrightarrow (A \to B)$
   ב. $(A \land \neg B) \leftrightarrow \neg(A \to B)$

בשאלות הבאות נתייחס למערכת הנחות יסוד חדשה. במערכת זו יש שני איברים מיוחדים: 0 ו-1 (לאו דווקא שונים), פעולות כפל וחיבור.
   א. $a+0=a$
   ב. $1\cdot a=a$
   ג. $a+b=b+a$
   ד. $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$
   ה. $a+(b+c) = (a+b)+c$
   ו. $a\cdot (b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$
   ז. $a+b=a+c \to b=c$
   ח. $(a\cdot b=a\cdot c) \land a\neq 0 \to b=c$

4. הוכח את הטענות הבאות:
   א. $0\cdot a=a$

ב. אם $a \cdot b = a$ אז או ש- $a=1$ או ש-$b=0$.

ג. אם $a \cdot a = a$ אזי $1=a$.

ד. $1=1+1$ גורר – $(b=0)$. (בלי תלות ב b !!)

נוסיף את הפעולה – שמקיימת את כל האקסיומות של + ובנוסף: $a-a=0$

5. נמק את כל השלבים הנכונים בהוכחה הבאה ומצא את השגיאה:

a = b

a^2 = ab

a^2 - b^2 = ab - b^2

(a + b)(a - b) = b(a - b)

a + b = b

b + b = b

b(1+1) = b

b=0

6. מצא את השגיאה בהוכחה הבאה:

$$\neg B \wedge \neg A \;\leftrightarrow\; \neg(B \vee A)$$
$$\leftrightarrow\; \neg\big((A \vee B) \vee (B \wedge \neg A)\big) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \neg\big((\neg A \to B) \vee \neg(B \to A)\big) \leftrightarrow$$
$$(B \to \neg A) \wedge (B \to A) \leftrightarrow \neg B$$

אקסיומות על מספרים טבעיים

אקסיומות יסוד:

1. 1 הוא הטבעי המינימלי.

אקסיומות סדר

2. לכל שני מספרים שונים אחד מהם גדול מהשני.
3. אף מספר לא גדול מעצמו.

חיבור וכפל

4. אם נחבר שני טבעיים נקבל מספר טבעי גדול יותר.
5. אם נכפיל שני טבעיים נקבל מספר טבעי גדול או שווה המתחלק בהם.
6. לכל שני טבעיים קיים מחלק משותף מכסימלי.
7. 0 נייטרלי לחיבור ו-1 נייטרלי לכפל.
8. חיבור הוא חילופי.
9. כפל הוא חילופי.
10. חיבור הוא קיבוצי.
11. כפל הוא קיבוצי.
12. כפל מתפלג מעל חיבור.

חיסור וחילוק

13. לכל מספר קיים נגדי לחיבור.
14. לכל מספר שאינו 0 קיים הופכי לכפל.
15. חיסור הוא חיבור עם ההופכי.
16. חילוק הוא כפל בהופכי.
17. מספר הוא שלם אם ורק אם הוא או הנגדי שלו לחיבור טבעי, או שהוא 0.
18. מספר רציונלי הוא מנה של מספר שלם במספר טבעי.

- דף תרגיל 2 -

1. הצרן את הטענות הבאות. לאחר מכן הוכח או הפרך אותן.
   א. לכל מספר ממשי m, יש פתרון למשוואה 0= m x^2 + m x + 1 כש- x מספר ממשי.
   ב. לכל מספר ממשי x, יש פתרון למשוואה 0= m x^2 + m x + 1 כש-m מספר ממשי.
   ג. קיים מספר ממשי m, כך שלכל מספר ממשי x מתקיים mx^2+mx+1=0.
   ד. לכל מספר ממשי m, אין פתרון למשוואה mx^2+1=0 כש- x מספר ממשי.
   ה. לכל מספר חיובי m, לכל מספר ממשי x מתקיים mx^2+1>0.

2. כתוב במילים את הטענות הבאות. לאחר מכן הוכח או הפרך אותן.
   א. $\forall x \in \mathbf{Z} : (x^3 = x) \vee (|x| < 2)$
   ב. $(\forall x \in \mathbf{Z} : x^3 = x) \vee (\forall x \in \mathbf{Z} : |x| < 2)$
   ג. $(\forall x \in \mathbf{Z} : x^3 = x) \vee (\exists x \in \mathbf{Z} : |x| < 2)$
   ד. $\forall x \in \mathbf{N} \ \exists y \in \mathbf{N} : x < y$
   ה. $\exists x \in \mathbf{N} \ \forall y \in \mathbf{N} : x < y$

3. כתוב את השלילה של הטענות הבאות:
   א. $\exists x \in \mathbf{N} \ \forall y \in \mathbf{N} : (x + y < 0) \vee (xy > 0)$
   ב. $\forall x \in \mathbf{R} \ \forall y \in \mathbf{R} \ \exists z \in \mathbf{R} : z \geq xy$
   ג. $\exists x \in \mathbf{R} \ \forall y \in \mathbf{R} \ \exists z \in \mathbf{R} : (z > y) \wedge (x > z)$. האם הטענה נכונה?
   ד. $\forall x \in \mathbf{R} \ \exists y \in \mathbf{R} \ \forall z \in \mathbf{R} : (z - y)^2 > x$. האם הטענה נכונה?

4. הצרן 3 טענות מתוך דף האקסיומות.

5. הוכח כי $\sqrt{3}$ אינו רציונלי.

- דף תרגיל 3 -

1. עבור הקבוצות $A=[0,3],\ B=(2,\infty)$ חשבו את הקבוצות הבאות (משלים נלקח ב- $\mathbf{R}$):
$A\setminus B,\ B\setminus A,\ A\cap B,\ A\cup B, A\Delta B,\ A^c, B^c,\ (A\cup B)^c$.

2. תהיינה C,B,A קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות :
   א) $A\subseteq B\cap C \Rightarrow A\subseteq B$ *וגם* $A\subseteq C$.
   ב) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.
   ג) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
   ד) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

3. הפריכו את הטענות הבאות באמצעות דוגמא נגדית, וציירו דיאגרמת וון להמחשה.
   א) $A\cap B\subset A$ (שימו לב, כאן יש הכלה ממש).
   ב) $A\cap B\subset A\cup B$.
   ג) $A\subseteq B\cup C \Rightarrow A\subseteq B$ *או* $A\subseteq C$.
   ד) $A\in B,\ B\in C\rightarrow A\notin C$.

4. תהיינה R,P,Q קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
   א) $(P\in Q)\wedge(Q\subseteq R)\rightarrow P\in R$
   ב) $(P\in Q)\wedge(Q\subseteq R)\rightarrow P\subseteq R$

5. לכל אחת מהפונקציות הבאות קבעו האם היא חד-חד-ערכית והאם היא על. אם היא אינה על, מצאו את $\mathrm{Im}(f)$:
   א) $f:R\rightarrow R$ מוגדרת ע"י : $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.
   ב) $f:R\rightarrow R$ מוגדרת ע"י : $f(x)=x^2+7x+10$.

6. תהיינה $g:A\rightarrow B\ ,\ f:B\rightarrow C$ פונקציות, הוכיחו כי :
   א) אם $f\circ g$ חח"ע ועל, אז f על ו- g חח"ע.
   ב) אם $f\circ g$ על ו- f חח"ע, אז g על.
   ג) $f\circ f=f$ אם"ם $\mathrm{Im}(f)\subseteq B$ ולכל $a\in\mathrm{Im}(f)$ מתקיים $f(a)=a$.

7. מצאו פונקציות חד-חד-ערכיות ועל:

א) מ- $[0,1)$ על $[1,\infty]$.

ב) מ- Z על N.

8. תהיינה $A,B \subseteq \mathbf{R}$, ותהי $f : A \to B$ פונקציה מונוטונית הפיכה.

א) הוכיחו כי f היא מונוטונית ממש.

ב) הוכיחו שגם f^{-1} מונוטונית, ובאותו כיוון כמו f.

9. האם הרכבה של פונקציות מונוטוניות היא בהכרח מונוטונית?

- דף תרגיל 4 -

1. הוכיחו את הזהויות הבאות מתוך זהויות הבסיס:

א. $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

ב. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2 a}$

ג. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$.

2. פתרו את המשוואות ואת אי השויונות הבאים:

א. $\log_2(4x) = \log_2 x + 5$

ב. $\log_3 x = \log_x 3$

ג. $\log_3 x < \log_x 3$ (שימו לב שלוגריתם עלול להיות שלילי)

ד. $25^x - 5^x + 5^0 < 1$

3. הוכיחו כי לכל טבעי n ולכל $a \in (0,1)$ מתקיים: $(1-a)^n \le \dfrac{1}{1+na}$.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל טבעי n מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. השוו זאת לנוסחת סכום סדרה חשבונית.

5. הוכיחו (באינדוקציה) כי לכל מספר ממשי q ולכל שלם חיובי $n \ge 0$ מתקיים:

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

6. סדרה מוגדרת על ידי כלל נסיגה: $a_1=6$, ו- $a_{n+1} = 3a_n - 8$ עבור $n\ge1$.

א. הוכיחו כי הסדרה המוגדרת ע"י הכלל: $b_n = a_n - 4$ היא סדרה הנדסית.

ב. מצאו נוסחא ל- a_n.

ג. הוכיחו כי סכום 2n האיברים הראשונים עם סימנים מתחלפים $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}$ שווה ל- $(1-3^{2n})/2$.

- דף תרגיל 5 -

1. פתרו את אי השוויונות הבאים:
   א. $|2x+3| \geq |x-5|$
   ב. $x^2 + 4x \geq 0$
   ג. $||x+1| - |x-1|| < 1$
   ד. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} \leq \sqrt{5-x}$
   ה. $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$
   ו. $3^x < 9^{x/2}$
   ז. $\log_3 x > \log_9 (x-1)$
2. הוכיחו כי לכל מספר ממשי a מתקיים: $|a-1| + |a+1| \geq 2$, ואפיינו מתי מתקיים השוויון. (האם תוכלו לתת הסבר גיאומטרי?)
3. הוכיחו כי לכל שני מספרים ממשיים x, y מתקיים: $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.
4. הוכיחו את זהות פסקל: לכל שני מספרים טבעיים n,k מתקיים:
   $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
5. יש לי 2 ספרי מתמטיקה, 3 ספרי פיזיקה ו-1 ספר אומנות.
   א. בכמה דרכים אוכל לבחור 2 ספרים לנסיעה מקטגוריות שונות?
   ב. בכמה דרכים אוכל לבחור 2 ספרים שאינם מתמטיים (לאו דווקא מקטגוריות שונות)?
   ג. בכמה דרכים אוכל לסדר אותם על המדף, כאשר אני מקפידה להפריד בין קטגוריות?
6. פשטו את הביטויים הבאים לפי ההוראות:
   א. $a^4 - b^4$ (כתבו כמכפלה עם כמה שיותר גורמים)
   ב. $(a-b)^4$ (כתבו כסכום לפי בינום ניוטון)
   ג. $\sum_{k=1}^{n} x^{2k}$ (רמז: העזרו בסדרות הנדסיות)