

УДК 517.951+535.4

Новые подходы к обратной задаче рассеяния**В. П. Паламодов**

Приводится обзор известных и новых математических методов, дающих точные аналитические результаты в задачах восстановления среды по данным рассеяния.

Библиография: 41 название.

Ключевые слова: рассеяние Кормака, рассеяние Брэгга, рассеяние Комптона, монохроматическое рассеяние, метод фазового контраста, метод обращенного времени, осцилляторные полиномы, гиперболическая геометрия.

DOI: 10.4213/rm9716

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	124
2. Обратная задача рассеяния Кормака.....	124
2.1. Формулы восстановления в интегральной геометрии.....	125
2.2. Софокусные параболоиды вращения.....	127
3. Восстановление по данным комптоновского рассеяния.....	129
3.1. Формулы восстановления в гиперболических пространствах....	130
3.2. Орисферы.....	132
4. Восстановление остаточных деформаций по данным рассеяния Брэгга.	132
4.1. Оператор Сен-Венана.....	133
4.2. Восстановление по интегралам вдоль лучей.....	134
5. Восстановление поля скоростей по рассеянию монохроматических волн	136
5.1. Устойчивость по данным монохроматического рассеяния.....	136
5.2. Решения типа гауссовых пучков.....	138
5.3. Неоднородные среды.....	140
5.4. Фазово-контрастное изображение.....	140
6. Обратная задача с источниками и обращение времени.....	141
6.1. Осцилляторные полиномы.....	142
6.2. Гиперболические полости и обращение времени.....	144
6.3. Граничная изометрия при распространении волн из полости....	145
Список литературы.....	146

1. Введение

Эта статья посвящена памяти Бориса Моисеевича Левитана. Мне посчастливилось знать его и долгие годы работать вместе с ним. Его классическим трудам я обязан моим интересом к обратной задаче рассеяния, а затем и к другим обратным задачам и методам. В статье дается краткий обзор некоторых недавно развитых точных методов восстановления:

1. Обратная задача рассеяния Кормака.
2. Формулы восстановления в интегральной геометрии.
3. Комптоновское рассеяние на плоскости.
4. Нахождение остаточных деформаций по данным рассеяния Брэгга.
5. Восстановление поля скоростей по рассеянию монохроматических волн.
6. Обратная задача с источниками и обращение времени.

2. Обратная задача рассеяния Кормака

Процитируем введение к последней работе А. Кормака [1]. “Рассмотрим семейство софокусных параболоидов вращения в R^3 , заданных уравнениями

$$r = \frac{2p}{1 + \langle \xi, \omega \rangle}, \quad (1)$$

где $r = |x|$, $\xi = x/|x|$, а p и $\omega \in S^2$ – параметры, причем p – это наименьшее расстояние до начала координат $x = 0$. Предположим, что в этом пространстве движутся волны со скоростью v и распределено рассеивающее вещество с гладкой плотностью f , быстро убывающей или имеющей компактный носитель. Рассеяние считается изотропным, а рассеивающее вещество – столь разреженным, что не влияет на v . Импульсивный волновой фронт с нормалью ω достигает начала координат при $t = 0$. В силу хорошо известных фокусирующих свойств параболоида все рассеянные волны, прибывающие в начало координат в момент $t = 2p/v$, берут начало на параболоиде, заданном уравнением (1) с параметрами (p, ω) , а интенсивность полученного рассеянного излучения пропорциональна поверхностному интегралу от функции f по этому параболоиду. Поэтому, измеряя интенсивность излучения, пришедшего в точку $x = 0$, как функцию от времени для всех p и ω , мы получаем (с точностью до константы) значения поверхностных интегралов от f по всем параболоидам вида (1). Обозначим интеграл по параболоиду (p, ω) через $Rf(p, \omega)$. Тогда задача нахождения f по результатам измерений Rf является задачей типа Радона для этих параболоидов. Можно найти решение f этой задачи Радона с помощью другого набора измерений рассеянных волн в обращенном времени: интенсивность рассеянного излучения от сферического импульса, возникшего в начале координат, измеренная в точках большой сферы с центром $x = 0$ как функция от времени, также будет пропорциональна поверхностным интегралам по параболоидам, заданным значениями ω .

Задача о нахождении f по Rf для семейства кривых в R^2 обсуждалась в [2], [3], причем в последней работе было показано, что параболический случай можно свести к обычному преобразованию Радона с помощью координатного

преобразования, не имеющего аналога в R^3 . Случай R^n изучался в [4], где функция f считалась разложенной по сферическим гармоникам; были установлены некоторые свойства этих гармонических компонент и дано решение возникающих интегральных уравнений. Это решение, однако, имело очень сложный вид, из-за чего в деталях не изучалось. Ниже приводятся более простое решение для R^3 и ряд результатов, могущих быть полезными при его практическом применении. Неудивительно, что большинство из них имеет хорошо известные аналоги в теории обычного преобразования Радона, так что доказательства в основном лишь намечаются, но подробно не проводятся. (Эти подробности довольно скучны и требуют знания многих результатов о специальных функциях.)”

Формула восстановления, полученная в [1] для \mathbb{R}^3 , такова:

$$r^{1/2} f(x) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \right)^2 \frac{g(p, \omega)}{p^{3/2}} \Big|_{p=r(1+\langle \xi, \omega \rangle)/2} d\omega. \quad (2)$$

Обозначения Кормака следующие: $r = |x|$, $\xi = x/|x|$ и

$$g(p, \omega) = \int_{x+\langle x, \omega \rangle=2p} f dS.$$

К сожалению, ядро в (2) имеет неинтегрируемую особенность при $\omega = -\xi$, поскольку

$$p^{-3/2} = \text{const } r^{-3/2} (1 + \langle \xi, \omega \rangle)^{-3/2} \approx C \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-3},$$

где θ – угол между ω и $-\xi$. С другой стороны, интеграл g берется по евклидовой плотности dS , а это не та плотность, которая отвечает “рассеянному свету, фильтрованному по времени прихода”. Ниже мы получим формулу восстановления, решающую задачу Кормака на \mathbb{R}^n для $n = 2, 3$ по данным, являющимся поверхностными интегралами от f (обозначение: Mf) по плотности “времени прихода”.

2.1. Формулы восстановления в интегральной геометрии. Пусть X , Σ – гладкие многообразия размерности $n > 1$, а $Z \subset X \times \Sigma$ – гиперповерхность. Обозначим через $p_X: Z \rightarrow X$ и $p_\Sigma: Z \rightarrow \Sigma$ естественные проекции и предположим, что отображения p_X и p_Σ имеют максимальный ранг n . Тогда множество $Z(\sigma) = p_\Sigma^{-1}(\sigma)$ является гладкой гиперповерхностью в X при каждом $\sigma \in \Sigma$, а множество $Z(x) = p_X^{-1}(x)$ – гладкой гиперповерхностью в Σ при каждом $x \in X$. Вещественнозначная функция $\Phi \in C^2(X \times \Sigma)$ называется *порождающей*, если $Z = \Phi^{-1}(0)$ и $d\Phi \neq 0$ на Z . Пусть $T^*(X)$ – кокасательное расслоение многообразия X , а $T^*(X)/\mathbb{R}_+$ – расслоение лучей в $T^*(X)$. Рассмотрим отображение $D_X: Z \times \mathbb{R}_+ \rightarrow T^*(X)$, где $D_X(x, \sigma; t) = (x, t d_x \Phi(x, \sigma))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение D_X является локальным диффеоморфизмом в точке $(x, \sigma, t) \in Z \times \mathbb{R}_+$, если $\det J(x, \sigma) \neq 0$, где*

$$J(x, \sigma) = \frac{\partial^2 t \Phi(x, \sigma)}{\partial(t, x) \partial(t, \sigma)} \Big|_{t=1},$$

а x_1, \dots, x_n и $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ – произвольные локальные координаты на X и Σ соответственно. Обратное, если D_X – локальный диффеоморфизм, то $\det J(x, \sigma) \neq 0$.

Условие $\det J(x, \sigma) \neq 0$ можно записать в инвариантном виде

$$d_x \Phi \wedge (d_x d_\sigma \Phi)^{\wedge n} \wedge d_\sigma \Phi \neq 0.$$

Пусть dX и $d\Sigma$ – формы объема на X и Σ соответственно, а $w = w(x, \sigma)$ – непрерывная (весовая) функция на $X \times \Sigma$. Для произвольной ограниченной функции f на X с компактным носителем интеграл

$$M_w f(\sigma) \doteq \int \delta(\Phi(x, \sigma)) f(x) w(x, \sigma) dX = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{|\Phi(\cdot, \sigma)| \leq \varepsilon} f(x) w(x, \sigma) dX$$

корректно определен для всех $\sigma \in \Sigma$. Пусть dX является римановой формой объема некоторой римановой метрики g на X . Тогда

$$M_w f(\sigma) = \int_{Z(\sigma)} \frac{f(y) w(y, \sigma) d_g S}{|d_x \Phi(y, \sigma)|_g}. \quad (3)$$

Если $w(x, \sigma) = |d_x \Phi(x, \sigma)|_g$, то (3) совпадает с метрическим интегралом

$$R_g f(\sigma) \doteq \int_{Z(\sigma)} f d_g S, \quad \sigma \in \Sigma.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки $x \neq y \in X$ называются *сопряженными* относительно Φ , если $\Phi(x, \omega) = \Phi(y, \omega) = 0$ и $d_\omega \Phi(x, \omega) = d_\omega \Phi(y, \omega)$ для некоторой точки $\omega \in \Sigma$.

Порождающая функция Φ называется *разрешенной*, если $\Sigma = \mathbb{R} \times S^{n-1}$, $d\Sigma = dp \wedge \Omega$, где Ω – евклидова форма объема на единичной сфере S^{n-1} , и $\Phi(x; p, \omega) = q(x, \omega) - p$, $p \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^{n-1}$. Сингулярный интеграл

$$Q_{w,u}(x, y) = \int_{S^{n-1}} \frac{w(x, \omega) u(y, \omega)}{(q(x, \omega) - q(y, \omega) - i0)^n} \Omega$$

корректно определен для несопряженных точек $x, y \in X$, $y \neq x$, и произвольных гладких функций w и u .

ТЕОРЕМА 2. Пусть разрешенная порождающая функция Φ и гладкие положительные функции w, u на $X \times \Sigma$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $\det J(x, \sigma) \neq 0$, а отображение $D_X: Z \times \mathbb{R}_+ \rightarrow T^*(X)$ инъективно и имеет плотный образ;
- (ii) не существует точек, сопряженных относительно Φ ;
- (iii) для всех $x, y \in X$, $x \neq y$, выполнено равенство

$$\operatorname{Re} i^n Q_{w,u}(x, y) = 0.$$

Тогда произвольная функция $f \in C^{n-1}(X)$ с компактным носителем восстанавливается по данным $M_r f$ с помощью формулы

$$f(x) = \frac{1}{2j^{n-1} D_n(x)} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}} M_w f(p, \omega) u(x, \omega) \right)_{p=q} \Omega$$

при нечетных n и формулы

$$f(x) = \frac{1}{j^n D_n(x)} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{M_\omega f(p, \omega) dp}{(q(x, \omega) - p)^n} u(x, \omega) \Omega$$

при четных n , в предположении, что

$$D_n(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \frac{w(x, \omega) u(x, \omega)}{|\nabla q(x, \omega)|^n} \Omega < \infty$$

(здесь использовано обозначение $j = 2\pi i$). При четных n предполагается также, что функция $\nabla^{n-1} f$ гёльдерова.

Доказательство см. в [5].

2.2. Софокусные параболоиды вращения. Все параболоиды вращения $Z(p, \omega)$ с фокусом в начале координат евклидова пространства E^n задаются уравнениями $|x| + \langle x, \omega \rangle = 2p$ для некоторых $p > 0$ и $\omega \in S^{n-1}$ (см. рис. 1). Для непрерывной функции f с компактным носителем определены два типа интегралов по параболоидам:

$$\begin{aligned} Rf(p, \omega) &= \int_{Z(p, \omega)} f dS, \\ Mf(p, \omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p \leq |x| - \langle x, \omega \rangle \leq p + \varepsilon} f dx = \int_{Z(p, \omega)} \frac{f dS}{|\theta + \omega|}, \quad \theta = \frac{x}{|x|}, \end{aligned} \quad (4)$$

где dS – евклидова поверхностная плотность. Функцию f можно восстановить как по Rf , так и по Mf .

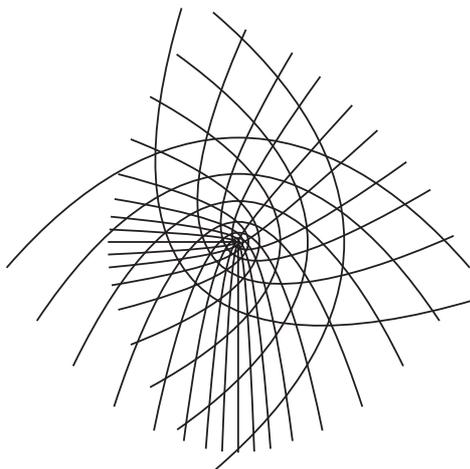


Рис. 1. Софокусные параболы

ТЕОРЕМА 3. Произвольная функция $f \in C^1(E^2)$ с компактным носителем на $E^2 \setminus \{0\}$ восстанавливается по формуле

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2|x|} \int_{S^1} \Omega \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial p} (pMf(p, \omega)) \frac{dp}{|x| + \langle x, \omega \rangle - p}.$$

Для любой функции $f \in C^2(E^3)$ с компактным носителем на $E^3 \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2\pi^2|2x|^{1/2}} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} p^{1/2} Rf(p, \omega) \Big|_{p=|x|+\langle x, \omega \rangle} \Omega \\ &= -\frac{1}{4\pi^2|x|} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} p Mf(p, \omega) \Big|_{p=|x|+\langle x, \omega \rangle} \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Первая формула в (5) аналогична формуле восстановления Кормака (2), где $g(p, \omega) = Rf(p, \omega)$. Интеграл Mf является правильной моделью для “рассеянного света, фильтрованного по времени прихода”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq 2$ произвольно. Семейство софокусных параболоидов вращения в евклидовом пространстве E^n порождается разрешенной функцией

$$\Phi(x; p, \omega) = q(x, \omega) - p, \quad q(x, \omega) = \frac{|x| + \langle x, \omega \rangle}{2},$$

заданной на многообразии $X \times \Sigma$, где $X = E^n \setminus \{0\}$, $\Sigma = \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$. Многообразие X снабжено евклидовой формой объема dx , а Σ – формой объема $dp \wedge \Omega$. Имеем

$$|\nabla_x q(x, \omega)|^2 = 1 + \langle \xi, \omega \rangle, \quad \xi = \frac{x}{|x|},$$

откуда следует, что

$$D_X(x, \omega, t) = (x, \theta = t(\xi + \omega)).$$

Это отображение гладко, его дифференциал $d_\omega \xi$ не обращается в нуль нигде, кроме точки $\omega = -\xi$, а образ отображения D_X – это множество U тех точек $(x, \xi) \in T_0(X)$, для которых $\langle \xi, x \rangle \neq 0$. Имеем

$$\nabla_x \Phi \wedge (d_\sigma \nabla_x \Phi)^{\wedge n} \wedge d_\sigma \Phi = \pm(n-1)! \langle \xi + \omega, \omega \rangle \Omega \wedge dp.$$

Следовательно, $\det J(\Phi) \neq 0$ на $Z \setminus Z_0$, где $Z_0 = \{(x; p, \omega) \in Z : x \in X, \omega = -\xi\}$. Тем самым условие (i) теоремы 2 выполнено на $Z \setminus Z_0$. Уравнение $d_\omega q(x, \omega) = -x$ влечет выполнение (ii). Для весовой функции $w = |\nabla_x q(x, \omega)|^2$ имеем

$$M_w f(p, \omega) = \int_{Z(p, \omega)} f |\nabla_x q(x, \omega)| dS = p^{1/2} R(|2x|^{-1/2} f).$$

Чтобы проверить (iii), заметим, что функция

$$q(x, \omega) - q(y, \omega) = \frac{1}{2}(|x| - |y| + \langle x - y, \omega \rangle)$$

является линейной функцией от ω для любых $x \neq y$. Эта функция имеет нуль $\omega \in S^{n-1}$, поскольку $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Имеем

$$Q_w(x, y) = \operatorname{Re} i^n \int_{S^{n-1}} \frac{w(y, \omega) \Omega}{(q(x, \omega) - q(y, \omega) - i0)^n}.$$

Этот интеграл равен нулю по приводимой ниже лемме 5, так как $\deg r = 1$ и $\deg r + n - 1 = n$.

ЛЕММА 4. Для любой функции $f \in C^2(E^3)$ имеем

$$\frac{\partial^2 Mf(p, \omega)}{\partial p^2} = O(1) \quad \text{при } p \rightarrow 0.$$

Доказательство этой леммы элементарно. Отсюда вытекает, что интеграл (5) равномерно сходится в классическом смысле, несмотря на критическое множество Z_0 , где $\det J = 0$. Теорема 3 доказана.

ЛЕММА 5. Для любых целых чисел $m > n > 1$, любых $x \in E^n \setminus \{0\}$ и $a \in \mathbb{R}$ таких, что $|a| < |x|$, и любого полинома q степени $\leq m - n + 1$ имеем

$$\operatorname{Re} i^n \int_{S^{n-1}} \frac{q(\omega) \Omega(\omega)}{(\langle \omega, x \rangle - a - i0)^m} = 0.$$

Доказательство использует полярную систему координат на S^{n-1} (см. [5]).

3. Восстановление по данным комптоновского рассеяния

При рассеянии гамма-фотон теряет энергию, переходящую в электрический заряд окружающей среды. Увеличение длины волны рассеянных гамма-лучей (красное смещение) выражается формулой Клейна–Нишины

$$E_\theta = E_0 \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \theta)},$$

где θ – угол комптоновского рассеяния, $\varepsilon = E_0/(m_e c^2)$, E_0 – энергия фотона, m_e – масса электрона, а c – скорость света в вакууме. С. Нортон [6] предложил аналитический метод нахождения электронной плотности в теле на основе подсчета числа рассеявшихся фотонов некоторой энергии E_θ , испущенных точечным источником S и зафиксированных точечным детектором D . Множество электронов, на которых происходит такое рассеяние, является дугой окружности в рассматриваемой плоскости P . На практике детектор нельзя поместить внутрь объекта, поэтому интегральные данные оказываются неполными. Позднее М. Нгуен и Т. Тронг [7] предложили другую геометрическую схему, в которой источник и детектор вращаются вокруг фиксированной точки, оставаясь противоположными друг другу, так что показания детектора собираются с целого семейства таких дуг. Нгуен и Тронг нашли формулу восстановления для коэффициентов Фурье электронной плотности по коэффициентам Фурье показаний детектора. Они пользовались методом Кормака [2]. Мы опишем ниже другую формулу, степень устойчивости которой такая же, как у обращения преобразования Радона.

Пренебрегая вторичным рассеянием фотонов, можно принять число зарегистрированных фотонов с энергией, близкой к E , равным числу первично рассеявшихся фотонов с углом рассеяния $\approx \theta$ таким, что $E_\theta = E$. Если детектор коллимирован с некоторой плоскостью P , содержащей приемник, то положение $x \in P$ любого события рассеяния лежит на дуге окружности SxD длины 2θ , опирающейся на отрезок SD . Симметричная дуга окружности не вносит вклада в показания детектора в силу правильной коллимации (см. рис. 2). Можно

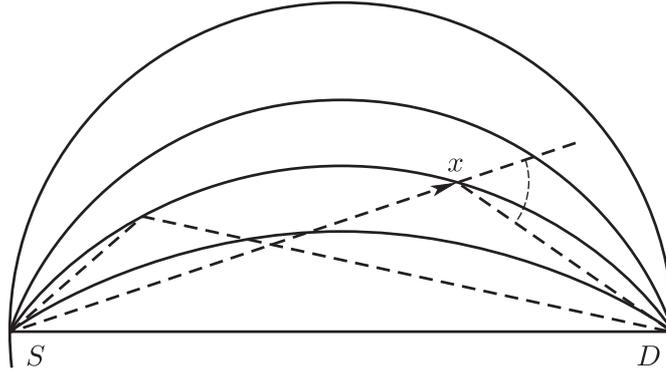


Рис. 2. Геометрия комптоновского рассеяния

считать, что $|SD| = 2$. Угол рассеяния θ равен $\pi - \angle SxD$; дуга окружности $F(\theta, \varphi) = SxD$ в плоскости P задается уравнением

$$\tan \theta (r^2 - 1) + 2 \cos(\theta - \varphi)r = 0, \quad |\theta - \varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

где $x = (r \cos \omega, r \sin \omega)$, а φ – угол поворота отрезка SD . Вклад интеграла от линейной плотности $f ds$ вдоль дуги, лежащей в плоскости P , в показания детектора N описывается следующей формулой (мы пренебрегаем затуханием):

$$\frac{dN(x, \theta)}{G(\theta) d\theta} = \int_{SxD} f(x) ds,$$

где G – известная функция от θ и учтена расходимость излучения в направлении, ортогональном к P . Нахождение плотности рассеивающих электронов тем самым сводится к восстановлению неизвестной функции f по данным, представляющим собой интегралы по некоторой выборке из круговых дуг, соединяющих две противоположные точки единичной окружности.

3.1. Формулы восстановления в гиперболических пространствах.

Рассмотрим более общую задачу восстановления в гиперболическом пространстве. Зафиксируем ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Пусть X – открытый единичный шар в E^n , $\Sigma = \mathbb{R} \times S^{n-1}$ и $\Phi_\varepsilon(x; p, \omega) = q_\varepsilon(x, \omega) - p$ – порождающая функция на $X \times \Sigma$, где

$$q_\varepsilon(x, \omega) = 2 \frac{\varepsilon - \langle \omega, x \rangle}{1 - |x|^2}, \quad \omega \in S^{n-1}. \quad (6)$$

Для всех $p \in \mathbb{R}$ и $\omega \in S^{n-1}$ множество $Z(p, \omega) = \{x \in X; \Phi_\varepsilon(x; p, \omega) = 0\}$ является пересечением шара X с некоторой сферой (если $p \neq 0$) или с гиперплоскостью $S(\omega) = \{\langle \omega, x \rangle - \varepsilon = 0\}$ (если $p = 0$). Пересечение $\partial X \cap Z(p, \omega)$ является $(n-2)$ -мерной сферой, содержащейся в сфере ∂X и имеющей центр $\varepsilon \omega$ и радиус $r = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$, не зависящий от p .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любой точки $\omega \in S^{n-1}$ и любых вещественных чисел p_1, p_2 гиперболическое расстояние от точки x , лежащей на сфере $Z(p_1, \omega)$, до сферы $Z(p_2, \omega)$ одно и то же для всех x . Иными словами, для любых p_1 и p_2 эти сферы параллельны в (гиперболической) геометрии Лобачевского на шаре X .

Порождающая функция Φ_ε удовлетворяет условиям теоремы 2 при любом ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Проверка условий (i) и (ii) стандартна, а для проверки (iii) запишем

$$q_\varepsilon(x, \omega) - q_\varepsilon(y, \omega) = \frac{2\langle \omega, r(x, y) \rangle + \varepsilon(|x|^2 - |y|^2)}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)},$$

где $r(x, y) \doteq y(1 - |x|^2) - x(1 - |y|^2)$. Возводя обе части в квадрат, легко видеть, что $r(x, y) > ||x|^2 - |y|^2|$ для всех $x \neq y \in X$. Поэтому

$$q_\varepsilon(x, \omega) - q_\varepsilon(y, \omega) = \langle \omega, a(x, y) \rangle + b(x, y),$$

где $|b| < |a|$. Интеграл от $\operatorname{Re} i^n (q_\varepsilon(x, \omega) - q_\varepsilon(y, \omega) - i0)^{-n}$ равен нулю по лемме 5. Запишем формулы для восстановления f по гиперболическому преобразованию $R_g f(p, \omega)$ и евклидову преобразованию $R_e f(p, \omega)$. Гиперболическая $(n - 1)$ -форма объема $d_g S$ связана с евклидовой формой dS равенством

$$d_g S = (1 - |x|^2)^{1-n} dS.$$

В силу факторизации

$$|\nabla q_\varepsilon(x, \omega)| = (1 - |x|^2)^{-1} (p^2 - 2\varepsilon p + 1)^{1/2}$$

гиперболическое интегральное преобразование R_g и евклидово преобразование R_e выражаются через интегральное преобразование M_ε , порожденное функцией Φ_ε :

$$\begin{aligned} M_\varepsilon f(p, \omega) &= (p^2 - 2\varepsilon p + 1)^{-1/2} R_g f_n(p, \omega) \\ &= (p^2 - 2\varepsilon p + 1)^{-1/2} R_e f_1(p, \omega), \end{aligned} \quad (7)$$

где $f_k(x) = (1 - |x|^2)^{-k} f(x)$, $k = 1, n$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для любой функции f с компактным носителем на гиперболическом шаре справедливы формулы восстановления

$$f(x) = \frac{1}{j^n D_n(x)} \int_{S^{n-1}} \Omega \int_{\mathbb{R}} \frac{R_g f(p, \omega) dp}{(p^2 - 2\varepsilon p + 1)^{1/2} (q_\varepsilon(x, \omega) - p)^n} \quad (8)$$

при четном n и

$$f(x) = \frac{1}{2j^{n-1} D_n(x)} \int_{S^{n-1}} \Omega \partial_p^{n-1} \frac{R_g f(p, \omega)}{(p^2 - 2\varepsilon p + 1)^{1/2}} \Big|_{p=q_\varepsilon(x, \omega)} \quad (9)$$

при нечетном n , где q_ε – та же функция, что и в (6), и

$$D_n(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega}{|\nabla q_\varepsilon(x; \omega)|^n}.$$

ПРИМЕР. Если $n = 2$ и $\varepsilon = 0$, то дуги окружностей, порожденные функцией

$$q_0(x; p, \omega) = -2\langle \omega, x \rangle (1 - |x|^2)^{-1},$$

соединяют противоположные точки единичной окружности, как и требуется геометрией плоского комптоновского рассеяния (рис. 2). Полагая $p = \tan \varphi$, имеем

$$dp = \cos^{-2} \varphi d\varphi \quad \text{и} \quad (p^2 + 1)^{-1/2} = \cos \varphi.$$

Из теоремы 2 и формулы (7) получаем

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1 + |x|^2}{(1 - |x|^2)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{R}f(p, \omega) d\varphi d\omega}{(\tan \varphi(|x|^2 - 1) + 2\langle \omega, x \rangle)^2}.$$

3.2. Орисферы. Орисферы в гиперболическом единичном шаре B – это сферы, касающиеся ∂B . Они порождены введенной в начале п. 3.1 функцией $\Phi_1 = q_1 - p$ с $\varepsilon = 1$, т. е.

$$q_1(x, \omega) = 2 \frac{1 - \langle \omega, x \rangle}{1 - |x|^2}.$$

Они также параллельны при любом n и фиксированном ω . При четном n получаем из (8) формулу

$$f(x) = \frac{1}{j^n D_n(x)} \int_{S^{n-1}} \Omega \int_2^\infty \frac{\text{R}_g f(p, \omega) dp}{(p-1)(q_1(x, \omega) - p)^n},$$

а при нечетном n – из (9) формулу

$$f(x) = \frac{1}{2j^{n-1}} \frac{1}{D_n(x)} \int_{S^{n-1}} \Omega \partial_p^{n-1} \frac{\text{R}_g f(p, \omega)}{p-1} \Big|_{p=q_1(x, \omega)},$$

где

$$D_n(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega}{(1 - 2\langle \omega, x \rangle + |x|^2)^n}.$$

Другие формулы восстановления были получены С. Хелгасоном в 1959 г. [8] и И. М. Гельфандом, М. И. Граевым и Н. Я. Виленкиным в 1962 г. [9].

4. Восстановление остаточных деформаций по данным рассеяния Брэгга

Дифракция нейтронов и синхротронного рентгеновского излучения дает единственный неразрушающий метод получения информации о внутренних напряжениях в больших твердых телах. Монохроматический пучок света сначала падает на оптический элемент, пропускающий только те фотоны, энергия или длина волны которых лежит в некотором узком диапазоне. Такой оптический элемент обычно представляет собой высококачественный кристалл, помещенный в пучок с отражающей ориентацией. Ширина пропускаемого диапазона зависит от качества кристалла и может быть порядка 10^{-4} или даже меньше (см. [10]).

Дифракционная картина фиксируется с помощью детекторов, измеряющих угол рассеяния, или детекторов, регистрирующих полный поток фотонов. Падающий рентгеновский луч или пучок нейтронов освещает выделенную часть образца и претерпевает брэгговское рассеяние на угол 2θ относительно находящегося справа детектора. Дифракционная картина (кольца Дебая–Шеррера)

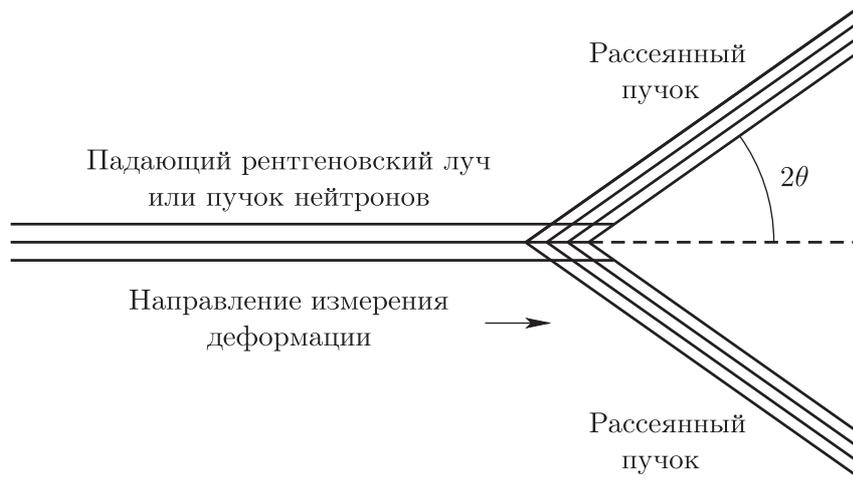


Рис. 3. Схема образования дифракционной картины

отвечает усреднению (по всему освещенному объему) компоненты тензора деформации, направленной вдоль биссектрисы угла между падающим и отраженным лучами. Математически дифракция Брэгга описывается интегралами от тензора деформации вдоль продольных осей. На рис. 3 показана схема возникновения колец Дебая–Шеррера при дифракции монохроматических лучей. Угол θ зависит от междуплоскостного расстояния d в кристаллическом образце согласно закону Брэгга: $2d \sin \theta = n\lambda$, где натуральное число n – это номер кольца. Напряжение, действующее в осевом направлении, уменьшает расстояние d в любом кристалле и увеличивает угол θ . Интеграл от тензора деформации вдоль луча можно вычислить по деформации дифракционной картины.

4.1. Оператор Сен-Венана. Пусть E – евклидово трехмерное пространство. Выберем евклидову систему координат (x^1, x^2, x^3) . Тензорные поля типа $(0, 2)$ – это симметричные дифференциальные формы

$$g = \sum g_{ij} dx^i \cdot dx^j,$$

где точка \cdot означает симметрическое произведение, т. е. $dx^j \cdot dx^i = dx^i \cdot dx^j$. Симметрический дифференциал D действует на 1-формах f по правилу

$$Df = g, \quad g_{ii} = \partial_i f_i, \quad g_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i f_j + \partial_j f_i), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тензор деформации ε некоторого тела определяется через линейную часть вектора малых смещений $u = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ по формуле

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Это тензор типа $(0, 2)$: $\varepsilon = \sum \varepsilon_{ij} dx^i \cdot dx^j$. Тензорное поле ε называется потенциальным, если $\varepsilon = Df$ для некоторой дифференциальной 1-формы f . Тензор напряжений σ рассматриваемого тела также является 2-тензорным полем; его

связь с тензором деформации описывается уравнением состояния $\sigma = c\varepsilon$, где c – тензор жесткости.

Обозначим через Σ^1 и Σ^2 пучки соответственно гладких и сингулярных (в смысле обобщенных функций) тензорных полей на E типов $(0, 1)$ и $(0, 2)$. Пусть Λ^2 – пучок кососимметрических дифференциальных форм степени 2, а $B^4 \doteq \Lambda^2 \otimes_S \Lambda^2$ – симметрический квадрат этого пучка. Каждый элемент $b \in B^4$ – это тензорное поле, компоненты $b_{ij,kl}$ которого представляют собой функции на E , кососимметрические по (i, j) и (k, l) и симметрические относительно перестановки $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$. Оператор Сен-Венана $V: \Sigma^2 \rightarrow B^4$ определяется на каждом тензорном поле $g \in \Sigma^2$ формулой

$$(Vg)_{ij,kl} \doteq \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_j \partial_k g_{il} + \partial_j \partial_l g_{ik}.$$

Координатные векторные поля $\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l$ можно заменить на любые касательные векторы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из E :

$$(Vg)_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \partial_\alpha \partial_\gamma g(\beta, \delta) - \partial_\alpha \partial_\delta g(\beta, \gamma) - \partial_\beta \partial_\gamma g(\alpha, \delta) + \partial_\beta \partial_\delta g(\alpha, \gamma).$$

Тензор Vg обращается в нуль для любого потенциального поля $g = Df$, поскольку $VD = 0$, где $D: \Sigma^1 \rightarrow \Sigma^2$ – симметрический дифференциал. Задачу восстановления тензора Сен-Венана по интегралам вдоль продольных осей изучали В. А. Шарафутдинов [11], [12] и А. Денисюк [13].

4.2. Восстановление по интегралам вдоль лучей. Любое 2-тензорное поле g на множестве $U \subset E$ можно записать как функцию на $U \times E \times E$, билинейную по векторным переменным:

$$g(x; u, v) = \sum g_{ij}(x) u^i v^j, \quad u, v \in E.$$

Если 2-тензорное поле g имеет компактный носитель на E , то интегралы по лучам

$$Xg(y; v) = \int_0^\infty g(y + tv; v, v) dt$$

корректно определены для всех точек $y \in E$ и векторов $v \neq 0$. Для произвольного вектора $\alpha \in E$ положим

$$\partial_\alpha Xg(y; v) = \langle \alpha, \nabla_y \rangle Xg(y; v), \quad \partial_{;\alpha} Xg(y; v) = \left. \frac{\partial}{\partial t} Xg(y; v + t\alpha) \right|_{t=0}.$$

Пусть S^2 – единичная сфера пространства E , а Ω – форма объема на S^2 . Для $p \in \mathbb{R}$ и $\omega \in S^2$ положим

$$H(p, \omega) = \{x \in E: \langle \omega, x \rangle = p\}$$

и зададим параметризацию $v = v(\theta)$ множества всех единичных касательных векторов в плоскости $H(p, \omega)$ формулой

$$v(\theta) = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2,$$

где (ω, e_1, e_2) – ортонормированный базис в E .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\Gamma \subset E$ – кусочно гладкая кривая, а g – гладкое $(0, 2)$ -тензорное поле с компактным носителем на $E \setminus \Gamma$. Тогда для любой точки $x \in E \setminus \Gamma$ такой, что каждая проходящая через x плоскость H пересекает Γ трансверсально в точке y , тензор $Vg(x)$ восстанавливается по интегралам вдоль лучей, исходящих из точек $y \in \Gamma$, по формуле

$$(Vg)_{\alpha\beta;\gamma\delta}(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\omega \in S^2} \partial_p R_{H(p,\omega)}|_{p=\langle x,\omega \rangle}(\alpha, \beta; \gamma, \delta)\Omega,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$ произвольны и для любой плоскости H , проходящей через точку $y \in \Gamma$, принято обозначение

$$R_H(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = R_H(\langle \beta, \omega \rangle \alpha, \omega; \langle \delta, \omega \rangle \gamma, \omega) - R_H(\langle \alpha, \omega \rangle \beta, \omega; \langle \delta, \omega \rangle \gamma, \omega) - R_H(\langle \beta, \omega \rangle \alpha, \omega; \langle \gamma, \omega \rangle \delta, \omega) + R_H(\langle \alpha, \omega \rangle \beta, \omega; \langle \gamma, \omega \rangle \delta, \omega), \quad (10)$$

где

$$R_H(\alpha, \omega; \beta, \omega) = \frac{1}{2} \int_{v \in S(\omega)} \partial_\alpha \partial_\beta \partial_{;\omega}^3 Xg(y; v) d\theta, \quad (11)$$

$S(\omega)$ – единичная окружность в $H(0, \omega)$ и $d\theta$ – угловая мера на $S(\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная геометрическая схема используется для восстановления функций в рентгеновской томографии: надо знать интегралы $Xf(y; v)$ только вдоль лучей, отвечающих точкам $y \in \Gamma$. В доплеровской томографии можно восстановить дифференциал dh 1-формы h по первым производным функций Xh . Для восстановления $(0, 2)$ -тензора согласно формуле (11) нужны вторые производные $\partial^2 Xg(y; v)/\partial y^i \partial y^j$ от интегралов вдоль лучей. Это – необходимый минимум экспериментальных данных.

ЛЕММА 8. Для произвольного 2-тензора g , любой плоскости $H = H(p, \omega)$, любой точки $y \in H$ и произвольных векторов α, β , параллельных плоскости H , имеем

$$\partial_p \int_{H(p,\omega)} (Vg)_{\omega\alpha;\omega\beta} dH = \frac{1}{2} \int_{v \in S(\omega)} \partial_\alpha \partial_\beta \partial_{;\omega}^3 Xg(y; v) d\theta. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Достаточно проверить, что тензор

$$\partial_p \int_{H(p,\omega)} (Vg)_{\alpha\beta;\gamma\delta} dH$$

удовлетворяет комбинаторному уравнению (10) для выражения R_H . Оба тензора совпадают на векторах $\omega, \alpha, \omega, \beta$, откуда вытекает равенство

$$R_H(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = \partial_p \int_H (Vg)_{\alpha\beta;\gamma\delta} dH \quad (13)$$

для произвольных четырех векторов и любой плоскости $H \subset E$. Правая часть этой формулы известна по лемме 8. Наконец, значение тензора Сен-Венана в точке $x \in E$ восстанавливается по его интегралам вдоль плоскостей согласно формуле Лоренца

$$(Vg)_{\alpha\beta;\gamma\delta}(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\omega \in S^2} \Omega \partial_p^2 \int_{H(p,\omega)} (Vg)_{\alpha\beta;\gamma\delta}|_{p=\langle \omega,x \rangle} dH$$

при подстановке в нее выражения (13). Теорема доказана.

Этот результат позволяет восстановить g с точностью до потенциального слагаемого Df , где f – дифференциальная 1-форма с компактным носителем. Указанное слагаемое можно явно восстановить по данным поляризационной томографии [14].

5. Восстановление поля скоростей по рассеянию монохроматических волн

Методы удаленного исследования неоднородных сред, включая геофизические исследования и акустическую томографию [15], основаны на восстановлении переменного коэффициента рефракции $\mathbf{n} = \mathbf{c}^{-1}$ в области $D \subset E^n$ по данным, определяемым решениями уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u(x) = 0 \quad (14)$$

в области D , где $k = 2\pi\omega\mathbf{n}$ – волновой вектор, а ω – фиксированная частота. Известно, что устойчивое восстановление возмущения $\delta\mathbf{n}$ невозможно для деталей размера $< \lambda(x)/2$, где $\lambda(x) = 1/(\mathbf{n}(x)\omega)$ – локальная длина волны. Детали размера $d > \lambda/2$ можно асимптотически устойчиво восстановить для больших частот ω . Для линеаризованной задачи и постоянной несущей скорости критический размер $\lambda/2$ означает релейский предел разрешения. Устойчивое восстановление может быть получено с помощью приближения Борна первого порядка, т. е. в рамках линеаризованной задачи. Для нелинейной задачи в плоском случае это было сформулировано и доказано в [16] на основе анализа Габора в фазовом пространстве. Заметим, что этот результат нельзя переформулировать на стандартном языке преобразования Фурье и микролокального анализа, поскольку несущая скорость \mathbf{c} не предполагается постоянной. Задача об устойчивости нахождения потенциальной функции по данным рассеяния недавно изучалась Х. Аммери с соавторами (см. работу [17] и ссылки в ней). Было доказано, что преобразование Фурье потенциала можно восстановить линейно устойчивым образом для всех частот, меньших $2k$ (что соответствует критическому размеру $\lambda/2$, как и ожидалось).

5.1. Устойчивость по данным монохроматического рассеяния. Предположим, что коэффициент рефракции \mathbf{n} в (14) является гладкой функцией, постоянной вне области $D \subset E$. Обратная задача рассеяния состоит в восстановлении функции \mathbf{n} по результатам измерений некоторого семейства решений на границе ∂D . Единственность решения этой задачи при “фиксированной энергии”, т. е. при фиксированном значении частоты ω , вытекает из работ Дж. Сильвестра и Г. Ульмана [18], Р. Г. Новикова [19] и А. Нахмана [20], Г. Эскина и Дж. Ральстона [21] при произвольном $n \geq 3$. Дальнейшие сведения об этом см. в обзоре Г. Ульмана [22].

Предположим, что коэффициент рефракции \mathbf{n} известен и мы можем вычислять решения уравнения (14), решая прямую задачу. Вопрос об устойчивости ставится так: какую надежную информацию о разности $\delta\mathbf{n} \doteq \tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{n}$ можно извлечь из результатов граничного измерения решений \tilde{u} возмущенного уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + \tilde{k}^2 \tilde{\mathbf{n}}^2 \omega^2) \tilde{u} = 0, \quad (15)$$

где $\tilde{k} = 2\pi\tilde{\mathbf{n}}\omega$? Информация надежна, если она устойчива в некотором разумном смысле. При известном коэффициенте рефракции норму разности потенциалов можно оценить малой степенью обратного логарифма нормы вариации отображения Дирихле–Неймана. Это означает, что для обеспечения разумной оценки потенциала надо измерить отображение Дирихле–Неймана с нереалистично высокой точностью. Аналогичная оценка через амплитуды рассеяния была получена П. Стефановым [23]. Она не допускает существенного усиления, так как логарифмическая функция не может быть изгнана из этих оценок.

С другой стороны, по “основной теореме дифракционной томографии” [24; формула (13.2.2)] возмущение δ постоянного коэффициента \mathbf{n}_0 может быть устойчиво восстановлено на частотном шаре $\Omega(2k)$ при постоянном коэффициенте \mathbf{n} . Эта “основная теорема” не является строгим утверждением, она установлена только в рамках приближения Борна (где игнорируется многократное рассеяние) или приближения Рытова (где пренебрегают членом $|\nabla\delta|^2$). Если же исходный коэффициент \mathbf{n} переменный, то критическая частота k зависит от точки пространства.

Устойчивость восстановления изучалась в [16] для случая $\dim E = 2$ на языке моментов Габора. Роль шара $\Omega(2k)$ здесь играет подмножество $\Omega(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}; \omega)$ фазового пространства $E \times E'$, определяемое как расслоение локальных частотных колец

$$\{(p, \xi) \in E \times E' : \omega|\mathbf{n}(p) - \tilde{\mathbf{n}}(p)| < |\xi| < \omega(\mathbf{n}(p) + \tilde{\mathbf{n}}(p))\}, \quad p \in D.$$

Для любого компакта $K \subset \Omega(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}; \omega)$ и фиксированного большого ω были вычислены моменты Габора (преобразование Фурье–Броса–Ягольницера)

$$\langle \delta, \mathbf{e}_\lambda \rangle = \int \delta(x) \exp(-\pi|x - p|^2 + 2\pi i\langle x, \xi \rangle) dx$$

для всех $\lambda = (p, \xi) \in K$ в терминах граничных измерений некоторого семейства специальных решений уравнений (14) и (15). Насколько близок может быть этот компакт к множеству $\Omega(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}; \omega)$, зависит от геометрии лучей, связанных с (14) и (15). Функция Габора

$$\mathbf{e}_\lambda = \exp(-\pi|x - p|^2 + 2\pi i\langle x, \xi \rangle),$$

именуемая в физической литературе *когерентным состоянием* в точке λ , является функцией, наиболее локализованной вблизи этой точки в фазовом пространстве.

Моменты Габора не являются независимыми, поскольку физическая мудрость гласит: *сигнал (изображение, поле), сосредоточенный в большой области D плоского фазового пространства, имеет около $|D|$ независимых степеней свободы* (Найквист, Вигнер, Бриллюэн, Шеннон, Габор). Объем “носителя” когерентного состояния в фазовом пространстве равен 1 в смысле анализа на фазовом пространстве. Поэтому момент Габора функции f в точке $\lambda = (p, \xi)$ является наилучшей возможной локализацией f одновременно по координатам и импульсам. Дальнейшие детали см. в [25].

5.2. Решения типа гауссовых пучков. Рассуждения работы [16] основаны на конструкции специальных решений уравнения (14), сосредоточенных в окрестности некоторого луча, не являющегося траекторией захвата, и называемых решениями типа гауссовых пучков. Такие решения впервые использовались в работах М. А. Леонтовича [26] и В. А. Фока [27] о дальнем распространении электромагнитных волн. Сейчас они являются стандартным средством в лазерной технике (см. монографии В. М. Баби́ча и В. С. Булдырева [28], [29], А. Зигмана [30], О. Свелто [31]). Однако нет общепринятого определения гауссовых пучков. Обычно решения типа гауссовых пучков в однородной среде в E^3 определяются как решения парааксиальной аппроксимации уравнения Гельмгольца

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x) = 0, \quad (16)$$

сосредоточенные вблизи луча $\gamma = \{y = z = 0\}$ и экспоненциально убывающие в ортогональных к этому лучу направлениях. Существенный носитель такого решения лежит в гиперboloиде

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq w^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w^2}(x - x_0)^2, \quad (17)$$

симметричном относительно плоскости $x = x_0$. Эта плоскость называется горловиной пучка, а w – диаметром пучка (см. рис. 4). Сужение решения на горловину называется профилем пучка и является гауссовой функцией для пучков основной (простейшей) моды. Профилем решения высшей моды может быть функция Эрмита–Гаусса или Лагерра–Гаусса. Чтобы пучок оставался коллимированным, члены в правой части уравнения (17) должны быть сбалансированы. Дальнейшую информацию о гауссовых пучках можно найти в [28] (для $n = 2$) и в [29] (для $n > 2$).

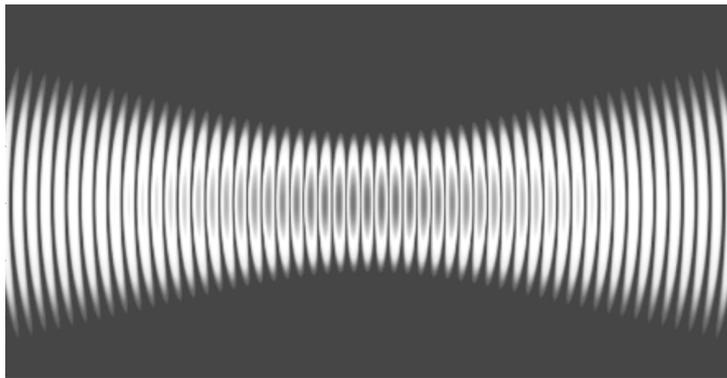


Рис. 4. Гауссов пучок в однородной среде

Гауссовы пучки являются моделью для пучков когерентного лазерного излучения. Они расходятся медленнее (и фокусируются лучше), чем пучки любой другой формы (см. [32]).

В [16] приведена следующая точная формула простейшего решения типа гауссова пучка для уравнения Гельмгольца на однородном пространстве E^n любой размерности $n \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть \mathbf{n} – постоянный коэффициент рефракции, а e – ненулевой вектор из E^3 . Тогда функция $\operatorname{Re} u_\theta(x, \omega)$ является точным решением типа гауссова пучка для уравнения Гельмгольца с лучом $\gamma = \{x = se, s \in \mathbb{R}\}$, волновым числом $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\omega\mathbf{n}$ и горловиной в начале координат, где

$$u_e(x, \omega) = \int_{|\theta|=1} \exp(k\langle\theta, e - |e| + ix\rangle) \Omega(\theta). \quad (18)$$

Решения вида u_e можно рассматривать как аналог решений Йоста, возникающих при анализе рассеяния в одномерном случае [33].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (17), u_e является суперпозицией экспоненциальных функций

$$E_\theta(x) = \exp(k\langle\theta, e - |e| + ix\rangle) = \exp(k(\langle\theta, e\rangle - |e|)) \exp(i\langle\xi, x\rangle)$$

при $|\theta| = 1$, где $\xi = k\theta$. Так как $|\xi| = k$, то функция $\exp(i\langle\xi, x\rangle)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца на множестве, где коэффициент \mathbf{n} постоянен. Поэтому и интеграл (18) удовлетворяет уравнению (14). Можно считать, что $e = (|e|, 0, \dots, 0)$. Тогда $\langle\xi, x\rangle = k(s\theta_1 + \langle q, \eta\rangle)$, $\theta_1 = \langle\theta, e\rangle$, $\eta = (\theta_2, \theta_3)$, $s = x_1$, $r = (x_2, x_3)$ и

$$u_e(x, \omega) = \exp(-k|e|) \int_{|\theta|=1} \exp(k(|e| + is)\theta_1 + ik\langle q, \eta\rangle) \Omega.$$

Отсюда вытекает, что $u_e(-s, q, \omega) = \bar{u}_e(s, q, \omega)$, так что плоскость $s = 0$ является горловиной решения $\operatorname{Re} u_e$. Имеем

$$u_e(x, \omega) = \exp(iks) \int_{S^2} \exp(k[(|e| + is)(\cos \varphi - 1) + i\langle r, \eta\rangle]) \Omega(\eta),$$

где $\cos \varphi = \langle e, \theta\rangle/|e|$. Применяя метод стационарной фазы с большими параметрами k и $|r|$, получаем

$$u_e(x; \omega) = \frac{\pi}{k(|e| + is)} \exp\left(iks - \frac{k|r|^2}{2(|e| + is)}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{k|e|}\right)\right). \quad (19)$$

Это решение осциллирует как $\exp(iks)$ вдоль луча $\gamma = \{x = se, s \in \mathbb{R}\}$ и экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$ с профилем

$$\frac{\pi}{k(|e| + is)} \exp\left(-\frac{k|e||r|^2}{2(|e|^2 + s^2)}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{k|e|}\right)\right).$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ экспоненциальный множитель ограничен величиной $\exp(-\varepsilon)$ в дополнении гиперболоида

$$k|e||r|^2 \leq 2\varepsilon(|e|^2 + s^2).$$

Это решение обладает всеми свойствами, требуемыми в [28] от решений типа гауссова пучка для параксиального уравнения (16), причем (18) является точным решением уравнения Гельмгольца. Предложение доказано.

5.3. Неоднородные среды. Для гладкого переменного коэффициента рефракции $\mathbf{n}(x) > 0$ решение типа гауссова пучка с лучом γ имеет вид

$$u_\gamma(x; \omega) = \frac{\pi \exp(i\chi)}{J^{1/2}} \exp(ik\varphi(x)) \exp(-k\Psi_\gamma(x))(1 + O(\omega^{-1/2})); \quad (20)$$

здесь φ – решение уравнения эйконала вдоль γ , т. е.

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \mathbf{n}(s) ds; \quad (21)$$

J – дивергенция; $r = (r_1, r_2)$ – евклидовы координаты в гиперплоскостях, ортогональных к γ , причем $r = 0$ на γ ; $\Psi_\gamma(s, q)$ – гладкая функция, зависящая только от \mathbf{n} , γ и такая, что

$$\Psi_\gamma(s, 0) = 0, \quad d\Psi_\gamma(s, 0) = 0, \quad \text{Re } d^2\Psi_\gamma(s, 0) > 0.$$

Показатель χ называется фазовым сдвигом Гуи; он соответствует критическому фазовому сдвигу в приближении геометрической оптики для гауссова пучка. Выбрав $J = |e|^2 + s^2$ и $\chi = \arg(|e| + is)^{-1}$ в (19), получаем совпадение с (20). Все решения типа гауссовых пучков сохраняют свою структуру (20) при рефракции и отражении. Сужение гауссова пучка (20) на луч γ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с переменной скоростью и диссипацией. Диссипация энергии пучка вдоль луча происходит в ортогональных к нему направлениях из-за расходимости лучей.

5.4. Фазово-контрастное изображение. Пусть \mathbf{n} – гладкая положительная функция на ограниченном открытом множестве $D \subset E$, определяющая метрику $\mathbf{n} ds$ без траекторий захвата, γ – луч, соединяющий две точки из ∂D , а u_γ – решение вида (20) для этого луча и частоты ω . Пусть, далее, $\delta\mathbf{n}$ – малое возмущение исходного коэффициента рефракции \mathbf{n} с носителем на D , а $\tilde{\gamma}$ – отвечающий новой метрике луч с теми же начальными данными, что и γ , в некоторой точке $x_0 \in \partial D$. Обозначим через w_γ решение типа гауссова пучка для возмущенного уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + \tilde{k}^2)w_e = 0, \quad \tilde{k} = 2\pi\omega\tilde{\mathbf{n}}, \quad \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \delta\mathbf{n},$$

с прежней частотой ω и с лучом $\tilde{\gamma}$, имеющее тот же профиль в точке x_0 , что и u_γ . Если норма возмущения в пространстве $C^1(D)$ удовлетворяет неравенству $\|\delta\mathbf{n}\|^{(1)} \leq C\omega^{-1/2}$, то $\text{dist}_{C^1}(\gamma, \tilde{\gamma}) \leq C\omega^{-1}$ и из (21) получаем

$$w_e(x, \omega) = \frac{\pi \exp(i\chi)}{J^{1/2}(x)} \exp\left(2\pi i \left[\omega\varphi(x) + \int_0^{\varphi(x)} \mathbf{f}(x(s)) ds \right]\right) \exp(-k\Psi_\gamma(x)) \\ \times (1 + O(\omega^{-1/2})) + O(\omega^{-1}),$$

где $x = x(s)$ – каноническая параметризация геодезической γ . Произведение $\mathbf{f} = \omega \delta\mathbf{n}$ имеет размерность, обратную к размерности длины, и

$$\int_\gamma \mathbf{f} ds = O(1) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty.$$

Возмущения самого луча, дивергенции J и функции Ψ_γ имеют порядок $O(\omega^{-1})$ и включены в остаточный член.

СЛЕДСТВИЕ 10. Сравнивая решения типа гауссовых пучков для возмущенного и невозмущенного уравнений Гельмгольца с одной и той же начальной точкой и одинаковым направляющим вектором, имеем

$$\frac{w_e(x, \omega)}{u_e(x, \omega)} = \exp\left(2\pi i \int_0^{\varphi(x)} \mathbf{f}(y(s)) ds\right) (1 + O(\omega^{-1/2})). \quad (22)$$

Функцию u_e можно вычислить заранее, а функцию w_e – измерить в точках входа и выхода $z \in \gamma \cap \partial D$. Если частное в (22) известно, то лучевой интеграл $\int_{\gamma} \mathbf{f} ds$ можно восстановить с точностью до множителя вида $1 + O(\omega^{-1/2})$ из уравнения

$$(1 + O(\omega^{-1/2})) \int_0^{\varphi(x)} \mathbf{f}(y(s)) ds = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \log \frac{w_e(x, \omega)}{u_e(x, \omega)}$$

при условии, что

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{f} ds \right| < 1. \quad (23)$$

Предполагая, что все частные (22) известны на границе множества D и что условие (23) выполнено, можно вычислить интегралы

$$\operatorname{Mf}(\gamma) \doteq \int_{\gamma} \mathbf{f} ds$$

вдоль всех замкнутых лучей γ в D . В этом случае возмущение \mathbf{f} может быть найдено методами интегральной геометрии. Условие, эквивалентное (23), было получено в [34] с помощью эвристических рассуждений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Гауссовы пучки u_e и w_e могут быть получены суперпозицией стандартных данных рассеяния. Действительно, оба пучка являются суперпозициями одной и той же плоской волны в окрестности произвольной точки $x_0 \in E \setminus D$. Если рассеянные волны U_{θ} и W_{θ} известны для каждого единичного вектора θ , то интегрирование этих волн по единичной сфере дает u_e и w_e .

6. Обратная задача с источниками и обращение времени

Различные методы обращения времени используются в акустике для аккуратного управления распространением волн и нахождения источников в сложных средах. Для этого сигнал записывают с помощью серии датчиков, обращают во времени и излучают обратно в среду. Обратная волна распространяется, в точности повторяя свои прежние состояния, и фокусируется на источнике исходного сигнала. В случае полости с обращенным временем (time-reversal cavity, TRC) датчики полностью окружают источник, так что обращенный сигнал при своем распространении проходит через все процессы кратного рассеяния, отражения и рефракции, которым подвергался прямой сигнал. Ясно, что метод обращения времени имеет прямое отношение к обратной задаче с источниками. Похожий метод был предложен в [15] для численного восстановления

в плоском случае. В обоих случаях речь идет о распространении обращенного во времени сигнала, но в TRC-экспериментах это распространение реально происходит, а в обратной задаче – симулируется. Однако самое важное различие заключается в том, что методы локализации источников путем обращения времени требуют знания свойств среды, а TRC-метод – нет (см. [35], [36]).

Рассмотрим модельную задачу о распространении волн с постоянной скоростью. Пусть D – область в евклидовом пространстве E^3 (она будет называться *полостью* в контексте обращения времени). Решение задачи Коши для волнового уравнения на пространстве-времени $E^3 \times \mathbb{R}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0, \quad (24)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u'_t(x, 0) = 0 \quad (25)$$

моделирует этап передачи сигнала. Здесь f – произвольная функция на E с носителем в полости D . Решение u единственно и существует во всем пространстве-времени. Оно регистрируется на многообразии $M = \partial D \times \mathbb{R}_+$, играющем в этом контексте роль *отражателя*, но не отражается обратно в D . Для некоторого класса областей D следующий алгоритм доставляет точное восстановление f по данным u на отражателе.

Алгоритм обращения времени:

I – передача $f \mapsto u|_M$,

II – фильтрация $u \mapsto v = Fu$ на отражателе M ,

III – обратная передача $v \mapsto g$ посредством решения уравнения (24) в обратном времени с граничными условиями v на отражателе,

IV – нормировка $g \mapsto Ng = f$.

Результат f действия этого алгоритма совпадает с начальным условием задачи (24). Оператор F , действующий на отражателе, и оператор N на полости являются параметрами алгоритма. Удивительно, что оператор фильтрации оказывается одним и тем же для всех областей D (про которые известно, что алгоритм на них успешно работает) и при этом имеет очень простой вид:

$$Fu(\xi, t) = \frac{4}{t}u(\xi, t), \quad \xi \in \partial D, \quad t > 0,$$

тогда как оператор N зависит от D , но известен заранее. Заметим, что физическое воплощение шагов I и III не требует знания ни скорости, ни евклидовой структуры оператора Δ . Это делает правдоподобной следующую *гипотезу*: аналогичный алгоритм имеется для любой полости и переменного поля скоростей. При этом численное воплощение шага III завершается за время $t = \text{diam } D$, поскольку пропагатор вперед для уравнения (24) сосредоточен на трехмерной поверхности $t = |x|$.

6.1. Осцилляторные полиномы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. рис. 5). Пусть p – вещественный полином на \mathbb{R}^n степени $m > 0$, а Z – множество его нулей. Будем называть полином p и множество Z *осцилляторными* относительно точки $a \in \mathbb{R}^n \setminus Z$, если p имеет m простых нулей на почти любой прямой $L \subset \mathbb{R}^n$, проходящей через a . Такая точка a называется

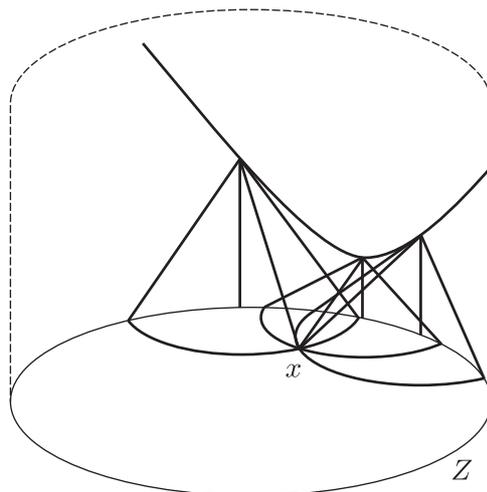


Рис. 5. Геометрия обращения времени

гиперболической. Назовем *полостью* полинома p любое максимальное связное множество H гиперболических точек этого полинома. Всякая полость выпукла. Это определение близко к аналогичному определению для полиномов, гиперболических по Петровскому [37]. Пусть p – однородный полином на \mathbb{R}^n степени m . Он называется *гиперболическим* относительно вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$, если $p(\theta) \neq 0$ и уравнение $p(t\theta + \eta) = 0$ имеет только вещественные нули $t = t_k(\eta)$, $k = 1, \dots, m$, для любого $\eta \in \mathbb{R}^n$. Если p – эллиптический осцилляторный полином, то он имеет только одну (ограниченную) полость.

В. И. Арнольд [38] применил свойство “гиперболичности” (= осцилляторности) полиномов для построения распределения электрических зарядов, порождающего нулевое электрическое поле на данном открытом множестве (полости).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Всякий полином p , гиперболический по Петровскому, является осцилляторным, а всякий конус гиперболичности является гиперболической полостью.*

Из каждого осцилляторного полинома можно изготовить гиперболический.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Для произвольного осцилляторного полинома p степени m и любой его гиперболической точки a полином $P_a(\tau, \xi) = \tau^m p(\tau^{-1}\xi + a)$ на \mathbb{R}^{n+1} однороден и гиперболичесок относительно $\theta = (1, 0, \dots, 0)$.*

Есть много негиперболических и неоднородных осцилляторных полиномов. Для каждого осцилляторного множества Z с гиперболической полостью H и любого аффинного подпространства A в \mathbb{R}^n множество $Z \cap A$ является осцилляторным с полостью $H \cap A$, если только оно непусто.

ПРИМЕРЫ. 1. Полином p степени m от одного переменного является осцилляторным тогда и только тогда, когда все его нули вещественны. Он имеет $m + 1$ полостей. То же верно для полинома вида $p(l(x))$ на \mathbb{R}^n , где l – произвольный линейный функционал на \mathbb{R}^n .

2. Все эллипсоиды, эллиптические параболоиды, эллиптические и параболические цилиндры являются осцилляторными множествами с одной гиперболической полостью, а двуполостный гиперболоид является таковым с двумя гиперболическими полостями. Однополостный гиперболоид, а также эллиптические и параболические гиперболоиды Z не являются осцилляторными множествами, так как форма кривизны такой поверхности Z не знакоопределена.

3. “Треугольная” гипотрохида (см. рис. 6) задается в неявном виде эллиптическим осцилляторным полиномом $p_4(x, y) = 4(x^2 + y^2)^2 - 4x^3 + 12xy^2 - 27(x^2 + y^2) + 27 = 0$. Это – осцилляторное множество степени 4.

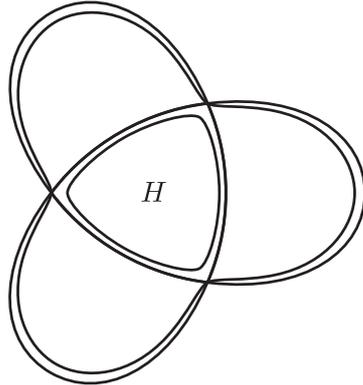


Рис. 6. Гипотрохида и регуляризация

4. “Пятиугольная” трохоида Z задается параметрически формулами $x = 2 \cos 3t + 5 \cos 2t$, $y = 2 \sin 3t - 5 \sin 2t$ и т. д.

5. Осцилляторный полином $p = (x^2 + y^2)^3 - 12(x^2 + y^2)^2 + 7x^2y^2 + 30(x^2 + y^2) - 20$ степени 6 эллиптичен.

6. Поверхность нормалей в системе уравнений кристаллооптики описывается уравнением

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\xi_i^2}{|\xi|^2 - \sigma_i} = 1,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – положительные константы. Это уравнение можно представить в виде $p_4(\xi) = 0$, где $p_4(\xi)$ – эллиптический осцилляторный полином степени 4. Полином $P(\tau, \xi) = \tau^4 p_4(\tau^{-1}\xi)$ четвертой степени на пространстве-времени \mathbb{R}^4 является символом гиперболической системы уравнений кристаллооптики. Уравнение $p_4(\xi) = 0$ задает компактную осцилляторную поверхность Z в \mathbb{R}^3 . Эта поверхность состоит из двух овалов, пересекающихся по четырем коническим особым точкам, в которых $dp_4 = 0$, но форма d^2p_4 невырождена.

6.2. Гиперболические полости и обращение времени. Функция

$$E_4(x, t) = \frac{1}{2\pi} \theta(t) \delta(t^2 - |x|^2)$$

является пропагатором вперед для уравнения (24).

ТЕОРЕМА 13. Пусть p – эллиптический осцилляторный полином на E^3 , положительный на гиперболической полости H , а q – произвольный полином

степени $< \deg p$ такой, что $p > 0$, $q > 0$ на \mathbb{H} . Тогда для полости \mathbb{H} и отражателя $M = Z \times \mathbb{R}_+$ успешно работает алгоритм обращения времени со следующими параметрами:

(i) передача (распространение в прямом времени) функции f с носителем на \mathbb{H}

$$f \mapsto u(\xi, t) = \int_{\mathbb{H}} \frac{d}{dt} E_4(\xi - x, t) f(x) dx, \quad \xi \in Z;$$

(ii) фильтрация $v = 4u/t$;

(iii) обращение времени и передача назад

$$g(x) = \int_Z \int_0^\infty \frac{d}{dt} E_4(x - \xi, t) v(\xi, t) dt \frac{q d\xi}{dp},$$

где ориентация многообразия Z задается вектором нормали, направленным внутрь полости;

(iv) нормировка

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} g(x).$$

Доказательство в [39] опирается на теорему 2. См. также [39] о том, как связано обращение времени с формулами восстановления в фото-термоакустической томографии.

Сформулированная теорема вряд ли остается верной далеко за пределами класса тех полостей и отражателей, которые заданы осцилляторными полиномами. Однако указанный в ней алгоритм при разумных упрощающих предположениях может работать и в других геометриях.

6.3. Граничная изометрия при распространении волн из полости.

СЛЕДСТВИЕ 14. Пусть $n \geq 1$, p – эллиптический осцилляторный полином на \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, а q – произвольный полином степени $< \deg p$. Тогда для произвольной функции f с носителем на \mathbb{H} имеем

$$4 \int_Z \int_0^\infty |u(\xi, t)|^2 \frac{dt}{t} \frac{q(\xi) d\xi}{dp(\xi)} = \int_{\mathbb{H}} |f(x)|^2 \frac{q(x) dx}{p(x)}, \quad (26)$$

где $u(x, t)$ – решение задачи (24), (25). Здесь ориентация множества Z задается вектором нормали, направленным внутрь \mathbb{H} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 13 алгоритм обращения времени T на шагах I, II, III имеет самосопряженный вид

$$T = EFE^*,$$

где $E: L_2(\mathbb{H}) \rightarrow L_2(Z \times \mathbb{R}_+, q d\xi/dp)$ – оператор передачи, а E^* – его сопряженный (несмотря на то, что отраженная плотность $q d\xi/dp$ не обязана быть положительной). Оператор F самосопряжен. Следствие доказано.

Уравнения (26) выражают законы сохранения при распространении волн через осцилляторную границу. Применение этих уравнений к линейной функции $p(x) = x_1$ и постоянной функции $q = 1$ дает

$$4 \int_{\xi_1=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |u(\xi, t)|^2 \frac{dt}{t} \frac{d\xi}{d\xi_1} = \int_{x_1>0} |f(x)|^2 \frac{dx}{x_1}. \quad (27)$$

Изометрические тождества такого вида были получены А. Л. Бухгеймом и В. Б. Кардаковым [40] (при нечетном n), а также Е. К. Нараянаном и Ракешем [41]. Их результаты похожи на уравнение (27), но не содержат множителя 4. Тем не менее формула (27) совпадает с формулами из [40] и [41], поскольку их авторы считают решения u четными функциями от x_1 .

Список литературы

- [1] A. M. Cormack, “A paraboloidal Radon transform”, *75 years of Radon transform* (Vienna, 1992), Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., **IV**, Int. Press, Cambridge, MA, 1994, 105–109.
- [2] A. M. Cormack, “The Radon transform on a family of curves in the plane”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**:2 (1981), 325–330; “II”, **86**:2 (1982), 293–298.
- [3] A. M. Cormack, “Radon’s problem – old and new”, *Inverse problems* (New York, 1983), SIAM-AMS Proc., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 33–39.
- [4] A. M. Cormack, “Radon’s problem for some surfaces in \mathbf{R}^n ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **99**:2 (1987), 305–312.
- [5] V. P. Palamodov, “A uniform reconstruction formula in integral geometry”, *Inverse Problems*, **28**:6 (2012), 065014, 15 pp.
- [6] S. J. Norton, “Compton scattering tomography”, *J. Appl. Phys.*, **76**:4 (1994), 2007–2015.
- [7] M. K. Nguyen, T. T. Truong, “Inversion of a new circular-arc Radon transform for Compton scattering tomography”, *Inverse Problems*, **26**:6 (2010), 065005, 13 pp.; “Corrigendum”, **26**:9 (2010), 099802, 1 pp.
- [8] S. Helgason, “Differential operators on homogeneous spaces”, *Acta Math.*, **102**:3 (1959), 239–299.
- [9] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, т. 5: *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Физматгиз, М., 1962, 656 с.; англ. пер.: I. M. Gel’fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, v. 5: *Integral geometry and representation theory*, Academic Press, New York–London, 1966, xvii+449 pp.
- [10] A. M. Korsunsky, W. J. J. Vorster, S. Y. Zhang, D. Dini, D. Latham, M. Golshan, J. Liu, Y. Kyriakoglou, M. J. Walsh, “The principle of strain reconstruction tomography: determination of quench strain distribution from diffraction measurements”, *Acta Materialia*, **54**:8 (2006), 2101–2108.
- [11] В. А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Наука, Новосибирск, 1993, 233 с.; англ. пер.: V. A. Sharafutdinov, *Integral geometry for tensor fields*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 1994, 271 pp.
- [12] V. A. Sharafutdinov, “Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data”, *Inverse Problems*, **23**:6 (2007), 2603–2627.
- [13] A. Denisjuk, “Inversion of the x-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve”, *Inverse Problems*, **22**:2 (2006), 399–411.
- [14] V. Palamodov, “On reconstruction of strain fields from tomographic data”, *Inverse Problems*, **31**:8 (2015), 85002, 12 pp.

- [15] F. Natterer, F. Wübbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*, SIAM Monogr. Math. Model. Comput., SIAM, Philadelphia, PA, 2001, xii+216 pp.
- [16] V. P. Palamodov, “Stability in diffraction tomography and a nonlinear ‘basic theorem’”, *J. Anal. Math.*, **91** (2003), 247–268.
- [17] H. Ammari, H. Bahouri, D. Dos Santos Ferreira, I. Gallagher, “Stability estimates for an inverse scattering problem at high frequencies”, *J. Math. Anal. Appl.*, **400**:2 (2013), 525–540.
- [18] J. Sylvester, G. Uhlmann, “A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem”, *Ann. of Math. (2)*, **125**:1 (1987), 153–169.
- [19] Р. Г. Новиков, “Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ ”, *Функци. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 11–22; англ. пер.: R. G. Novikov, “Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 263–272.
- [20] A. I. Nachman, “Reconstructions from boundary measurements”, *Ann. of Math. (2)*, **128**:3 (1988), 531–576.
- [21] G. Eskin, J. Ralston, “The inverse backscattering problem in three dimensions”, *Comm. Math. Phys.*, **124**:2 (1989), 169–215.
- [22] G. Uhlmann, “Developments in inverse problems since Calderón’s foundational paper”, *Harmonic analysis and partial differential equations* (Chicago, IL, 1996), Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999, 295–345 pp.
- [23] P. Stefanov, “Stability of the inverse problem in potential scattering at fixed energy”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **40**:4 (1990), 867–884.
- [24] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, 2-е изд., Наука, М., 1973, 720 с.; пер. с англ.: M. Born, E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, 7th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 985 pp.
- [25] J. P. Klauder, B. S. Skagerstam (eds.), *Coherent states. Applications in physics and mathematical physics*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1985, xviii+911 pp.
- [26] М. А. Леонтович, “Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли”, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **8**:1 (1944), 16–22.
- [27] В. А. Фок, “Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела”, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **10**:2 (1946), 171–186; англ. пер.: V. A. Fock, “The field of a plane wave near the surface of a conducting body”, *Acad. Sci. USSR. J. Phys.*, **10** (1946), 399–409.
- [28] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972, 456 с.; англ. пер.: V. M. Babich, V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory. Asymptotic methods*, Springer Ser. Wave Phenomena, **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, xi+445 pp.
- [29] В. М. Бабич, “Построение гауссовых пучков с экспоненциально малой невязкой”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 22, Зап. научн. сем. ПОМИ, **203**, Наука, СПб., 1992, 17–20; англ. пер.: V. M. Babich, “The construction of Gaussian beams with exponentially small residual”, *J. Math. Sci.*, **79**:4 (1996), 1169–1171.
- [30] A. E. Siegman, *Lasers*, Univ. Sci. Books, Sausalito, CA, 1986, 1283 pp.
- [31] O. Svelto, *Principles of lasers*, 5th ed., Springer, Heidelberg, 2010, xxii+620 pp.
- [32] A. E. Siegman, “How to (maybe) measure laser beam quality”, *DPSS lasers: applications and issues*, Tutorial presentation at the Optical Society of America Annual Meeting Long Beach, OSA Trends in Optics and Photonics, **17**, OSA, Washington, DC, 1998.

- [33] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980, 320 с.; англ. пер.: S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau [Plenum], New York, 1984, xi+286 pp.
- [34] F. Natterer, “Reflectors in wave equation imaging”, *Wave Motion*, **45**:6 (2008), 776–784.
- [35] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, M. Fink, “Decomposition of the time-reversal operator: detection and selective focusing on two scatterers”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **99**:4 (1996), 2067–2076.
- [36] M. Fink, C. Prada, “Acoustic time-reversal mirrors”, *Inverse Problems*, **17**:1 (2001), R1–R38.
- [37] I. Petrowsky, “On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations”, *Матем. сб.*, **17(59)**:3 (1945), 289–370.
- [38] В. И. Арнольд, “О ньютоновском потенциале гиперболических слоев”, *Тр. Тбилисского ун-та. Сер. Матем. Мех. Астрон.*, **232/233**:13–14 (1982), 23–29; англ. пер.: V. I. Arnold, “On the Newtonian potential of hyperbolic layers”, *Selecta Math. Sov.*, **4**:1 (1985), 103–106.
- [39] V. P. Palamodov, “Time reversal in photoacoustic tomography and levitation in a cavity”, *Inverse Problems*, **30**:12 (2014), 125006, 16 pp.
- [40] А. Л. Бухгейм, В. Б. Кардаков, “Решение обратной задачи для уравнения упругих волн методом сферических средних”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:4 (1978), 749–758; англ. пер.: A. L. Bukhgeim, V. B. Kardakov, “Solution of the inverse problem for the equation of elastic waves by the method of spherical means”, *Sib. Math. J.*, **19** (1979), 528–535.
- [41] E. K. Narayanan, Rakesh, “Spherical means with centers on a hyperplane in even dimensions”, *Inverse Problems*, **26**:3 (2010), 035014, 12 pp.

Виктор Павлович Паламодов
(**Victor P. Palamodov**)
Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel
E-mail: palamodo@post.tau.ac.il

Поступила в редакцию
25.12.2015