

## מבחן במבוא לקומבינטוריקה ולתורת הגרפים

סמסטר ב' התש"ע

**תאריך:**

**מרצה:** פרופ' נוגה אלון

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבון.
- במבחן חמש שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על ארבע מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן. יש להקפיד ולרשום את מספר הסטודנט על טופס הבחינה.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

## שאלה 1

חשבו את הסכום

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$$

תשובה:

הוכחה:

**שאלה 2**

תהא  $A$  קבוצה בת 20 מספרים טבעיים שונים בין 1 ל 1000. הוכיחו כי יש שתי תת-קבוצות זרות  $X, Y \subseteq A$  עבורן  $|X| = |Y| > 0$  וגם

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y$$

הוכחה:

### שאלה 3

יהא  $n > 4$  טבעי. מהו מספר הפונקציות  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  שהן על?

תשובה:

הוכחה:

### שאלה 4

נסמן ב  $a_n$  את מספר הסדרות באורך  $n$  המורכבות מהספרות 0, 1, 2 שאינן מכילות זוג אפסים או זוג אחדות עוקבים (נשים לב כי  $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7$ ).

(א) הוכיחו כי לכל  $n \geq 2$  מתקיים  $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ .

הוכחה:

(ב) מצאו נוסחה מפורשת ל  $a_n$ .

תשובה:

הוכחה:

**שאלה 5**

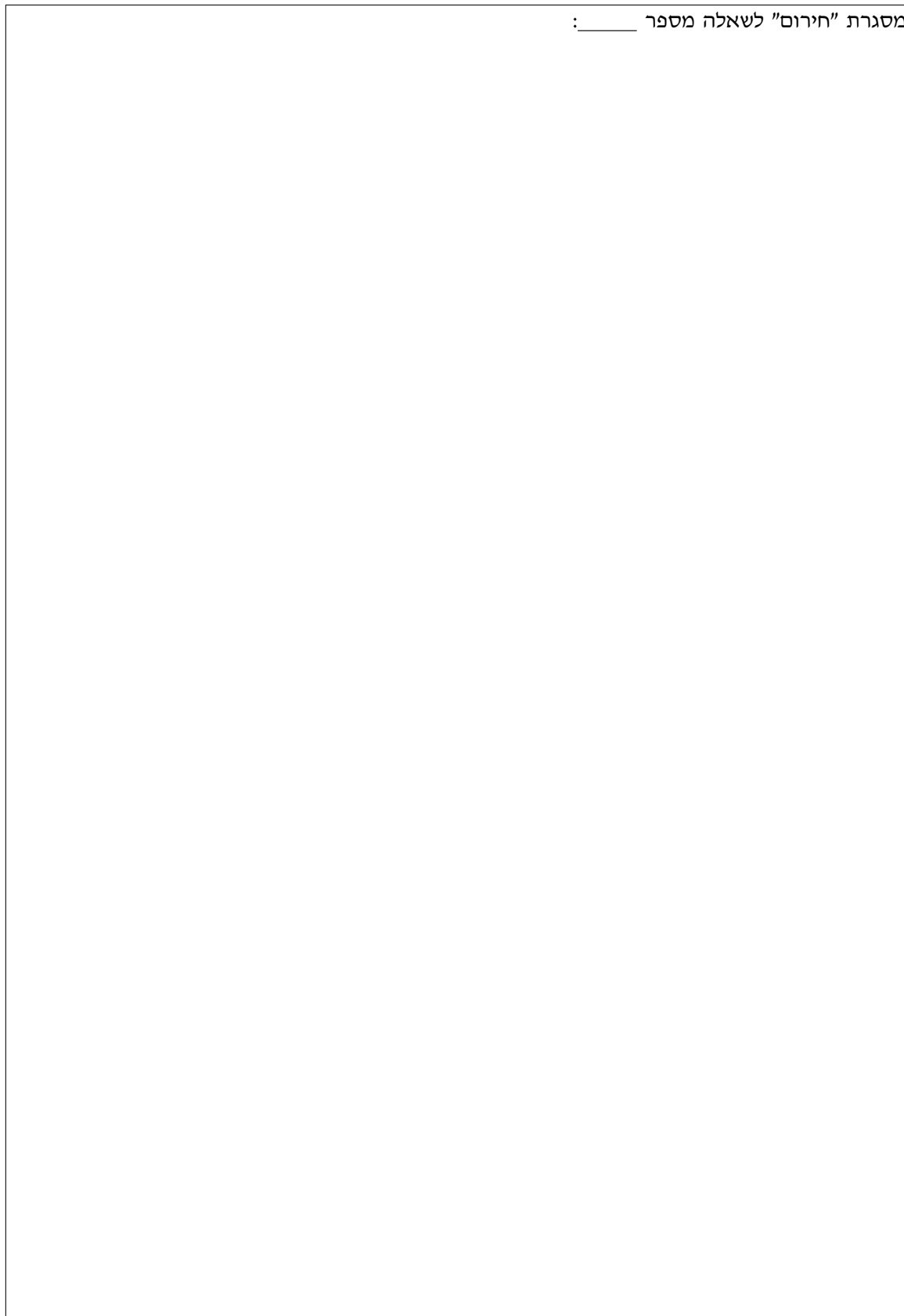
תהא  $A$  מטריצה  $n \times n$  עם איברים אי-שליליים המקיימת  $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} = 1$  לכל  $1 \leq j \leq n$ .  
הראו שיש תמורה  $\pi \in S_n$  כך ש  $a_{i,\pi(i)} > 0$  לכל  $1 \leq i \leq n$ .

הוכחה:

מס' מחברת: \_\_\_\_\_

ת.ז.: \_\_\_\_\_

מסגרת "חירום" לשאלה מספר \_\_\_\_\_:



מס' מחברת: \_\_\_\_\_

ת.ז.: \_\_\_\_\_

מסגרת "חירום" לשאלה מספר \_\_\_\_\_:

