מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים - מועד א'
סקיצת פתרון

הערה הרשום מטה מהווה סקיצה לפתרון בלבד, ולא פתרון מלא ופורמלי כפי שנדרש בבחינה עצמה. כמו כן, בשום מקרה אין מדובר בפתרון האפשרי היחיד.

1. נספור את כמות המחרוזות הבינאריות באורך n בהן בדיוק $2m+1$ אפסים.

אגף שמאל נבחר את המקומות בהן יופיע המספר 0 - $\binom{n}{2m+1}$ אפשרויות.

אגף ימין נפריד לקבוצות זרות לפי מיקומו של האפס ה־$m+1$ משמאל, אותו נסמן ב־k. נשים לב כי $k \in \{m+1, \ldots, n-m\}$ שכן משמאלו מופיעים בדיוק m אפסים נוספים ומימינו מופיעים בדיוק m אפסים נוספים. בהנתן k, עלינו לבחור את המקומות לאפסים שמשמאל לאפס ה־$m+1$ - לזה יש $\binom{k-1}{m}$ אפשרויות - ולבחור את המקומות לאפסים שמימין לאפס ה־$m+1$ - לזה יש $\binom{n-k}{m}$ אפשרויות. מעקרונות הכפל והסכום נובע הדרוש.

2. נביט במיקום הספרה 1 ובמיקום הספרה 64 על הלוח. נבחר מסלול מונוטוני (כזה שלא כולל צעדי ימינה וגם שמאלה, או למעלה וגם למטה) מהמשבצת של 1 למשבצת של 64. כל צלע שנחצית בדרך תהיה שובך, וכל נקודת הפרש (בערך מוחלט) בין שתי משבצות עוקבות במסלול תהיה יונה. לכן, במסלול לפחות $64-1=63$ יונים, ולכל היותר $7+7=14$ שובכים (אורך מסלול מונוטוני מירבי), ומעקרון שובך היונים המוכלל קיים שובך שבו לפחות $\lceil 63/14 \rceil = 5$ יונים, כלומר שתי משבצות סמוכות שההפרש ביניהן הנו לפחות 5.

3. נסמן את מספר התלמידים בכיתה ב־n, ונבחין בין שני מקרים.

מקרה א' קיים תלמיד המשתתף בקבוצת ספורט יחידה. במקרה זה, כל שאר התלמידים חייבים להשתתף גם הם בקבוצת הספורט הזו, ועל כן קיימת קבוצת ספורט בה משתתפים n תלמידים (ו־$n \geq \frac{n}{3}$).

מקרה ב' כל תלמיד משתתף לפחות בשתי קבוצות. במקרה זה, כמות ה"הרשמות" לקבוצות הנה לפחות $2n$. הרשמות אלה מתחלקות בין 3 קבוצות, ולפי עקרון שובך היונים המוכלל קיימת קבוצת ספורט אליה נרשמו לפחות $\lceil 2n/3 \rceil$ תלמידים, כדרוש.

הערה קל לראות זאת באמצעות גרף דו־צדדי, שבצידו האחד התלמידים, בצידו השני הקבוצות, והקשתות הנן ההרשמות.

4. נסמן את הפתרון ב־a_n ונמצא את הפונקציה היוצרת $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. מתקיים:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1+x^2+x^4+\ldots\right)\left(1+x^3+x^6+\ldots\right)\left(1+x+x^2\right)(1+x) \\ &= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\left(1+x+x^2\right)(1+x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n \end{aligned}$$

ולכן $a_n = n+1$.

5. נמצא חסמים מלעיל ומלרע:

חסם מלרע נביט בגרף הבנוי מקבוצת קודקודים בגודל $n-1$ עם כל הקשתות האפשריות המחברות ביניהם (גרף שלם על $n-1$ קודקודים), בנוסף לקודקוד מבודד אחד (שאינו מחובר בקשת לאף קודקוד אחר). גרף זה אינו קשיר, ויש בו $\binom{n-1}{2}$ קשתות, ועל־כן $f\left(n\right)\geq\binom{n-1}{2}$.

חסם מלעיל יהי G גרף לא קשיר על n קודקודים, ויהי C רכיב קשירות שלו, ו־B קבוצת שאר הקודקודים בגרף. נניח כי מספר הקודקודים ב־C הנו $1\leq k<n$. אז:

$$\left|E\left(G\right)\right|\leq\left|E\left(C\right)\right|+\left|E\left(B\right)\right|\leq\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}\leq\binom{n-1}{2}$$

ולכן $f\left(n\right)\leq\binom{n-1}{2}$.