מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים - מועד ב'
סקיצת פתרון

הערה הרשום מטה מהווה סקיצה לפתרון בלבד, ולא פתרון מלא ופורמלי כפי שנדרש בבחינה עצמה. כמו כן, בשום מקרה אין מדובר בפתרון האפשרי היחיד.

1. נפתור בשתי דרכים שונות:

פתרון קומבינטורי בהנתן קבוצה של n פילים, נחשב את מספר האפשרויות להטיס אותם ל־5 קרקסים שונים: אחד בירושלים, אחד בתל־אביב, אחד בניו־יורק, אחד בלונדון ואחד בברלין, כך שסך הפילים שנשלחו לקרקס בישראל הנו r.

אגף שמאל ראשית נבחר את r הפילים שישלחו לישראל - $\binom{n}{r}$ אפשרויות; אחר נבחר מתוכם את הירושלמים - 2^r אפשרויות; ולבסוף נחלק את הלא־ישראלים ל־3 הקרקסים שבניכר - 3^{n-r} אפשרויות.

אגף ימין נפריד למאורעות זרים לפי מספר הפילים שלא נשלחו לאמריקה - נסמן מספר זה ב־k. מובן כי $k \in \{r, \ldots, n\}$. בהנתן k, נבחר את קבוצת הפילים הנ"ל - $\binom{n}{k}$ אפשרויות; אחר נבחר מתוכה את קבוצת הפילים שישלחו לישראל - $\binom{k}{r}$ אפשרויות; מבין הפילים שנשלחו לישראל נבחר את הירושלמים - 2^r אפשרויות; ולבסוף מבין הפילים שלא נשלחו לישראל ולא לאמריקה נבחר את אלה שישלחו ללונדון - 2^{k-r} אפשרויות.

פתרון אלגברי באינדוקציה על n.

בסיס עבור $n = 1$ גם $r = 1$ ואז

$$\binom{n}{r} 2^r 3^{n-r} = 2 = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{r} 2^k$$

צעד לכל $r > 1$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{k}{r}2^k &= \sum_{k=r}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\binom{k}{r}2^k \\
&= \sum_{k=r}^{n+1}\binom{n}{k}\binom{k}{r}2^k+\sum_{k=r}^{n+1}\binom{n}{k-1}\binom{k}{r}2^k \\
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}2^k+\sum_{k=r-1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k+1}{r}2^{k+1} \\
&= \binom{n}{r}2^r3^{n-r}+\sum_{k=r-1}^{n}\binom{n}{k}\left(\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}\right)2^{k+1} \\
&= \binom{n}{r}2^r3^{n-r}+\sum_{k=r-1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}2^{k+1}+\sum_{k=r-1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r-1}2^{k+1} \\
&= \binom{n}{r}2^r3^{n-r}+2\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}2^k+2\sum_{k=r-1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r-1}2^k \\
&= \binom{n}{r}2^r3^{n-r}+2\binom{n}{r}2^r3^{n-r}+2\binom{n}{r-1}2^{r-1}3^{n-(r-1)} \\
&= \binom{n}{r}2^r3^{(n+1)-r}+\binom{n}{r-1}2^r3^{(n+1)-r} \\
&= \left(\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\right)2^r3^{(n+1)-r}=\binom{n+1}{r}2^r3^{(n+1)-r}
\end{aligned}$$

2. נבחר יונים ושובכים כדלהלן:

יונים המספרים ב־A. יש 9 כאלה.
שובכים איברי $\mathbb{Z}_2^3$. יש 8 כאלה.

נסמן כל $a \in A$ באופן הבא: $a = 2^i3^j5^k$ (זה אפשרי לפי הגדרת a), ונגדיר את $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ להיות שאריות החלוקה של i,j,k ב־2 בהתאמה. אז: $\left(\hat{i},\hat{j},\hat{k}\right)$ הנו איבר ב־$\mathbb{Z}_2^3$. נוכל למקם את היונה a בשובך $\left(\hat{i},\hat{j},\hat{k}\right)$, ולהסיק מעקרון שובך היונים שיש שתי יונים באותו שובך. כלומר, קיימים $a \neq b$ ב־A המקיימים:

$$\begin{aligned}
a &= 2^{i_a}3^{j_a}5^{k_a} \\
b &= 2^{i_b}3^{j_b}5^{k_b}
\end{aligned}$$

עם $i_a \equiv i_b$, $j_a \equiv j_b$ ו־$k_a \equiv k_b$ (מודולו 2). לכן: $i_a + i_b$, $j_a + j_b$ ו־$k_a + k_b$ הם כולם זוגיים. נסמן את החלוקה של כל סכום כזה ב־2 ב־i, j, ו־k בהתאמה. אז:

$$ab = 2^{2i}3^{2j}5^{2k} = \left(2^i3^j5^k\right)^2$$

ולכן ab הנו ריבוע שלם.

3. נראה כי

$$\sum_{k=2012}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \Theta\left(3^n\right)$$

וזה יוכיח את הטענה. מצד אחד,

$$\sum_{k=2012}^{n} 2^k \binom{n}{k} \le \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

(כאשר השוויון האחרון הנו זהות קומבינטורית פשוטה). מצד שני, לכל n מספיק גדול,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2012}^{n} 2^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{2011} 2^k \binom{n}{k} \\ &\ge 3^n - 2012 \cdot 2^{2012} \binom{n}{2012} \\ &\ge 3^n - 2012 \cdot 2^{2012} \cdot n^{2012} = \Omega\left(3^n\right) \end{aligned}$$

ומכאן הדרוש.

4. נסמן ב־a_n את מספר הסדרות באורך n מעל האלפבית $\{1, 2, \ldots, 6\}$ ללא הופעה של שני מספרים זוגיים ברצף, וב־b_n את מספר הסדרות מעל האלפבית הנ"ל ללא הגבלות כלשהן. הסיכוי הדרוש הנו, לכן, a_n/b_n. קל לראות כי $b_n = 6^n$. כדי לחשב את a_n, נוכל לחשוב עליו כעל סדרות של $0, 1$ כאשר 0 מייצג ספרה זוגית ו־1 מייצג ספרה אי־זוגית, ולאחר מכן לכפול את התוצאה ב־3^n (מספר האפשרויות לבחור מבין הזוגיות והאי־זוגיות ספרה כלשהי). הצטמצמנו, אם כן, לשאלה כמה סדרות בינאריות באורך n קיימות, ללא רצף של שני אפסים. נסמן כמות זו ב־$\hat{a}_n$, ואז $a_n = \hat{a}_n \cdot 3^n$. את התשובה לשאלה זו ראינו: הפתרון הנו סדרת פיבונאצ'י עם תנאי התחלה $\hat{a}_0 = 1$ ו־$\hat{a}_1 = 2$. לכן

$$\hat{a}_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ומכאן שהסיכוי הנו

$$p_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3^n \hat{a}_n}{6^n} = \frac{\hat{a}_n}{2^n} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

5. אם G קשיר, וב־G' יש צלע נוספת, מובן ש־G' קשיר. נניח כי G אינו קשיר, ונראה כי x, y נמצאים באותו רכיב קשירות. אחרת, קיים רכיב קשירות שבו קודקוד אחד בלבד מדרגה אי־זוגית וזה לא ייתכן. מכאן נובע שהצלע הנוספת (x, y) אינה מחברת בין שני רכיבי קשירות שונים, ולכן גם G' אינו קשיר.