1 קירוב לינארי

1.1 מציאת קירוב לינארי

בפרק זה של הקורס נלמד יישום של מושג הנגזרת ושל מושג הישר המשיק. ראינו במהלך הקורס כי בשביל למצוא את הישר המשיק בנקודה x_0, עלינו למצוא קודם כל את ערך הפונקציה ב־x_0 ואת ערך הנגזרת ב־x_0. אם הפונקציה האמורה היא $f(x)$, והישר המשיק הוא $g(x) = ax + b$, ראינו כי

$$a = f'(x_0)$$

וצריך להתקיים

$$g(x_0) = f(x_0)$$

כלומר

$$f'(x_0)\,x_0 + b = f(x_0)$$

ולכן

$$b = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$$

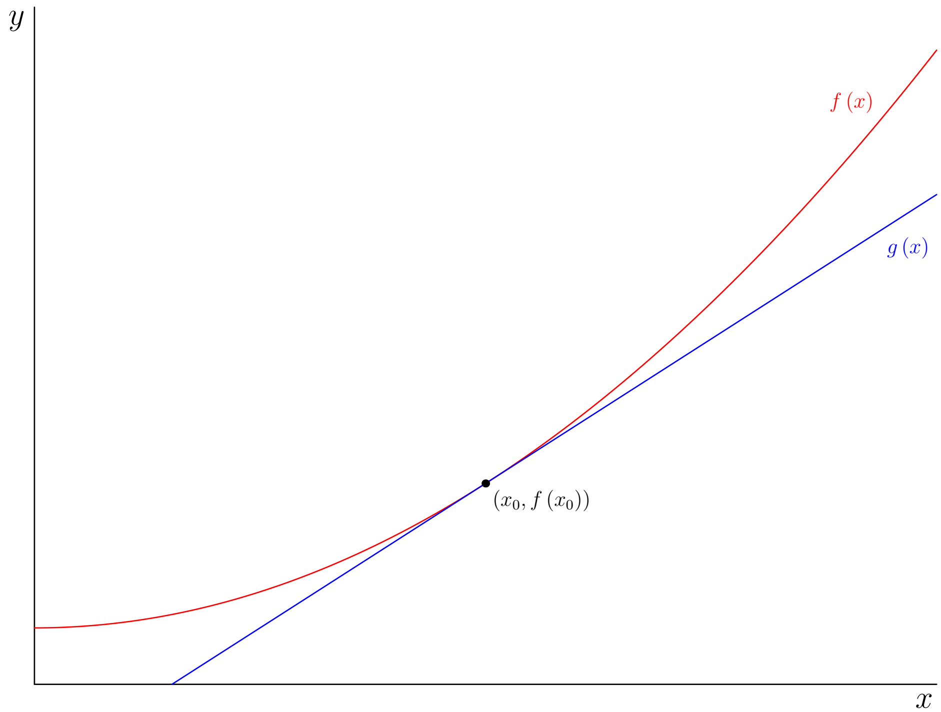
וכך ניתן לפתח נוסחה בודדת למציאת הישר המשיק:

$$g(x) = ax + b = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ובקיצור:

$$\boxed{g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

הבה נביט בגרף הבא (באדום) ובישר המשיק לו בנקודה x_0 כלשהי (בכחול):



מהגרף הנ"ל ניתן לראות כי בסביבת x_0, הפונקציה והמשיק כמעט זהים. לכן, נוכל להשתמש בפונקציית הישר המשיק כ**הערכה מקורבת** לפונקציה המקורית. מכיוון שהמשיק הוא קו ישר, נקרא להערכה כזו **קירוב לינארי**.

מה המניע לעשות זאת? נביט בדוגמה.

דוגמה 1

נקבע קירוב לינארי לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ בנקודה $x = 8$; ננסה להעריך באמצעות הקירוב הנ"ל את $\sqrt[3]{8.05}$ ואת $\sqrt[3]{25}$.

העבודה עצמה פשוטה מאד: נמצא את הקו המשיק בעזרת הנוסחה שמצאנו קודם לכן -

$$\begin{aligned} g(x) &= f(8) + f'(8)(x-8) \\ f(8) &= \sqrt[3]{8} = 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \\ f'(8) &= \frac{1}{3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{12} \\ g(x) &= 2 + \frac{x-8}{12} \end{aligned}$$

הקירוב מתקבל ע"י הצבה במשיק:

$$g(8.05) = 2 + \frac{0.05}{12} = 2\frac{1}{240}$$

$$g(25) \quad = \quad 2+\frac{17}{12}=3\frac{5}{12}$$

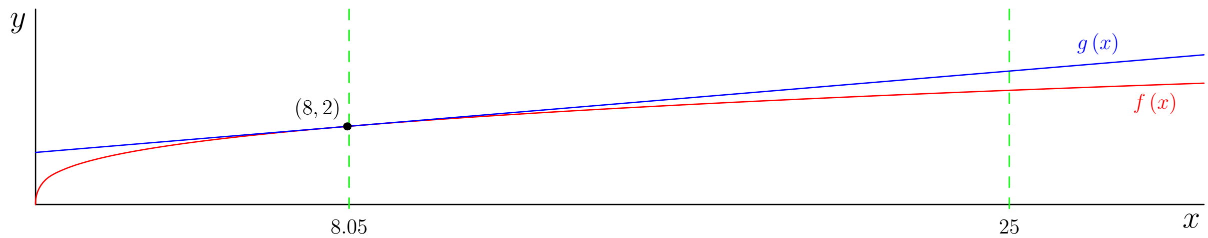
האם ההערכות שקיבלנו טובות? נשתמש במחשבון כדי לבדוק:

$$g(8.05)\simeq 2.004167 \qquad f(8.05)\simeq 2.004158$$

לא רע! ההערכה ב־8.05 ממש מוצלחת. מה לגבי ההערכה ב־25?

$$g(25)\simeq 3.416667 \qquad f(25)=\simeq 2.924018$$

לא משהו. אבל אם חושבים על זה קצת, זה לא צריך להפתיע שזהו המצב. בסביבה של 8, הפונקציה והמשיק נראים כמעט אותו הדבר ־ זאת מכיוון שהערך והשיפוע שלהם ב־8 זהה. עם זאת, עת אנו מתרחקים מ־8, שיפוע הפונקציה והמשיק ההוא כבר אינם דומים בהכרח, וסביר שהערך יתרחק. אפשר להבין זאת מהסקיצה:



מסקנה

הקירוב הלינארי עובד טוב יותר כאשר אנו מנסים לקרב את ערך הפונקציה בנקודה "מאד קרובה" לנקודת ההשקה. מה זה "מאד קרובה"? זה כבר מאד תלוי בפונקציה ובמספרים, אין בידינו כלי מוצלח לדעת. פשוט ננסה לחשוב על נקודת השקה נוחה כמה שיותר קרובה למספר שאנו רוצים להעריך.

דוגמה 2

הבה ננסה לקרב את $\sin 0.1$. לשם כך, נבחר כנקודה השקה את 0. מדוע שנעשה זאת? מאחר ו־0 הוא גם קרוב ל־0.1, אך גם נוח לחישוב ־ חשוב שנדע את ערך הפונקציה וערך הנגזרת בנקודה זו, כדי להצליח למצוא את המשיק! נסמן ב־g את המשיק ב־0. מתקיים:

$$g(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=\sin 0+\cos 0\cdot x=x$$

ולכן

$$g(0.1)=0.1$$

כלומר, הקירוב הלינארי של $\sin 0.1$ הוא 0.1.

למעשה, במקום 0.1 יכולנו לרשום כל מספר ממש קטן אחר (למשל: 0.007), ולקבל שהקירוב הלינארי שלו שווה לו עצמו; בזה הוכחנו, בעצם, שלכל x ממש קטן מתקיים

$$\sin x \simeq x$$

כלומר, x מאד דומה ל־$\sin x$ ל־x־ים מספיק קטנים. נסו במחשבון ותראו!

תרגיל

מצאו קירוב לינארי לערך $\sqrt{65}$.

פתרון תרגיל

נחפש נקודת השקה נוחה; כלומר, נקודה קרובה ל־65, אך שאנו יודעים את השורש שלה. למשל: 64. נמצא את המשיק לגרף ב־64:

$$g(x) = f(64) + f'(64)(x-64)$$

כאשר $f(x) = \sqrt{x}$, ולכן $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. נקבל:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}}(x-64) \\ &= 8 + \frac{x-64}{16} = \frac{x}{16} + 4 \end{aligned}$$

ולכן

$$g(65) = \frac{65}{16} + 4 = 8\frac{1}{16}$$

ולכן $\sqrt{65} \simeq 8\frac{1}{16}$.

1.2 הנגזרת כקצב שינוי

נביט בשאלה (הפשוטה מאד) הבאה: ברגע נתון, אצן במסלול נמצא במרחק של 15 מ' מתחילת המסלול ובמהירות של 3 מטרים בשנייה. היכן יימצא, בקירוב, כעבור 2 שניות?

כיצד נענה על שאלה כזו? ראשית, הגודל שעליו שואלים אותנו הוא ה<u>מרחק</u> (מתחילת המסלול). נסמן את פונקציית המרחק ב־f. למעשה, אנחנו לא יודעים על f כמעט שום דבר... הרי יכול להיות שהמהירות של האצן משתנה כל הזמן (ולא נשארת על 3 מ' בשנייה כל הזמן). עם זאת, אנחנו יכולים להניח שזוהי פונקציה גזירה (חלקה). ה<u>נגזרת</u> של הפונקציה הזו בנקודה מסוימת היא למעשה מהירות הריצה ברגע זה.

מדוע זה כך? מדוע הנגזרת של פונקציית המרחק היא מהירות הריצה? זה נובע מהגדרת הנגזרת. אם נסמן את פונקציית המרחק ב־$f(t)$ (כתלויה בזמן), נקבל כי בנקודת זמן t_0 מתקיים

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

כלומר, הנגזרת מתקבלת ע"י חלוקת המרחק שהאצן עבר בזמן מסוים, בזמן הזה. כבר בתיכון למדנו כי "מרחק לחלק לזמן = מהירות" ־ אז למעשה, ה"מרחק לחלק לזמן" נותן לנו את המהירות הממוצעת בקטע זמן מסוים; כדי לקבל את המהירות ברגע אחד ספציפי, צריך שה"קטע" יהיה ממש קצר. לכן צריך להוציא גבול ־ ולקבל את הנגזרת.

מכיוון ש־2 שניות זה זמן יחסית קצר, ניתן להניח שגם אם האצן שינה את מהירותו בינתיים, נוכל להניח בקירוב שמהירותו נותרה זהה, ולקבל, פחות או יותר, את מיקומו בתום 2 השניות הללו. אם האצן הגביר את מהירותו בזמן זה, אנחנו נקבל הערכה נמוכה מדי, ואם הוא האט, נקבל הערכה גבוהה מדי; אך אם מדובר בפרק זמן קצר (כמו 2 שניות), בכל מקרה הערכתנו לא תהיה רחוקה מדי מהאמת.

למעשה, ההערכה שלנו מהווה קירוב לינארי; ההנחה שהמהירות, כלומר קצב השינוי, הוא קבוע, היא כמו ההנחה שהשיפוע קבוע ־ כלומר, שאנחנו מדברים על קו ישר. הקו הישר הזה הוא פשוט הישר המשיק.

תשובתנו לשאלה זו תהיה, אם כך, הצבה בישר המשיק, שנקרא לו $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0) \\ &= 15 + 3(x - t_0) \\ g(t_0 + 2) &= 15 + 3(t_0 + 2 - t_0) = 21 \end{aligned}$$

כלומר, 21 מ'.

דוגמה

אורכו ורוחבו של מלבן משתנים כל הזמן. ברגע נתון, אורכו של המלבן הוא 4 מטרים ורוחבו 3 מטרים; ברגע זה, הרוחב גדל בקצב של 5 מטרים בשנייה, והאורך גדל בקצב של 6 מטרים בשנייה. בעזרת קירוב לינארי, חשבו את שטח המלבן כעבור מחצית השנייה.

השטח תלוי באורך וברוחב; מכיוון שהאורך והרוחב גדלים כל אחד בנפרד, נגדיר פונקציה עבור כל אחד מהם בנפרד. לפונקציית האורך נקרא $f(t)$ ולפונקציית הרוחב $g(t)$. ע"פ הנתונים:

$$\begin{aligned} f(t_0) = 4 \qquad f'(t_0) = 6 \\ g(t_0) = 3 \qquad g'(t_0) = 5 \end{aligned}$$

יהי f_1 המשיק של f ו־g_1 המשיק של g. מתקיים:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = 4 + 6(t - t_0) \\ g_1(t) &= g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) = 3 + 5(t - t_0) \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} f_1\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) &= 4 + 6\left(t_0 + \frac{1}{2} - t_0\right) = 7 \\ g_1\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) &= 3 + 5\left(t_0 + \frac{1}{2} - t_0\right) = 5.5 \end{aligned}$$

ולכן לאחר כמחצית השנייה, אורך המלבן בקירוב הנו 7 מטרים, רוחב המלבן בקירוב הנו 5.5 מטרים, ולכן שטחו הוא בקירוב $7 \cdot 5.5 = 38.5$ מ"ר.

תרגיל

גודלו של עיגול משתנה עם הזמן. ברגע t שניות, שטחו של העיגול נתון ע"י הנוסחה $\pi\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)+2\right)$ (בסמ"ר).

(א) מה יהיה רדיוסו של העיגול ברגע $t=9$ שניות?

(ב) מה יהיה קצב שינוי רדיוסו של העיגול ברגע $t=9$ שניות?

פתרון

הפתרון לסעיף א' פשוט - מדובר בהצבה בלבד, ובשימוש בנוסחת שטח עיגול; ברגע $t=2$ שניות, שטחו של העיגול יהיה

$$\pi\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)+2\right)=\pi\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)=3\pi$$

ולכן מתקיים

$$\begin{aligned}3\pi &= \pi r^2\\ r &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

כלומר, רדיוס העיגול יהיה $\sqrt{3}$ ס"מ. בשביל לגלות מה יהיה קצב שינוי רדיוסו של העיגול, נמצא את פונקציית הרדיוס. מתקיים

$$\begin{aligned}\pi r^2 &= \pi\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)+2\right)\\ r^2 &= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)+2\\ r &= \sqrt{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)+2}\end{aligned}$$

נמצא את הנגזרת של פונקציה זו בנקודה $t=2$:

$$\begin{aligned}r'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)+2}}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\\ r'(2) &= \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\sqrt{2}\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)+2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2}}=\frac{\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\end{aligned}$$

כלומר, קצב השינוי של הרדיוס בשנייה $t=9$ הוא $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ ס"מ בשנייה.