סמסטר קיץ 2010

בחינה לדוגמה מס' 1 - הערות

שאלה 2 (7 נק')

חשב/י את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\right)}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\right)} &= e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\right)} \\
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\right) &\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}\right) \\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x - \frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x}}{6x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{6x}\right) \\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x - 2\frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}}{6}\right) \\
&= \left(\frac{-1-2\frac{1}{1}}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\
\lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\right)} &= e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

שאלה 3 (3 נק')

מספר המולקולות בקערה א' נתון ע"י הנוסחה $100t^8 + 5t^3 + t^2$, ומספר המולקולות בקערה ב' נתון ע"י הנוסחה $t^9 + t^2 + t$, כאשר t מבטא את הזמן (בשניות) מתחילת הניסוי. נניח כי הניסוי נמשך <u>זמן רב</u>. היכן סביר להניח כי נמצא יותר מולקולות בתום הניסוי? יש לנמק!

סביר להניח כי בקערה ב' יהיו יותר מולקולות בתום הניסוי, מאחר ופולינום ממעלה 9 גדל מהר יותר מפולינום ממעלה 8. במילים אחרות:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^9 + t^2 + t}{100t^8 + 5t^3 + t^2} = \infty$$

שאלה 4 (10 נק')

(א) הראה/י כי למשוואה $3^x + 7 = 16x$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,1]$.

(ב) הראה/י כי למשוואה $3^x + 7 = 16x$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0,1]$.

כדי להראות שיש לפחות פתרון אחד, נשתמש במשפט ערך הביניים. נסמן:

$$f(x) = 3^x + 7 - 16x$$

ואז

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 7 - 0 > 0 \\ f(1) &= 3 + 7 - 48 < 0 \end{aligned}$$

ולכן קיים $c \in (0,1)$ עבורו $f(c) = 0$, ולכן יש לפחות פתרון אחד למשוואה הנתונה בקטע האמור.

כדי להראות שאין יותר מפתרון אחד, מספיק להראות שהפונקציה יורדת ממש. אכן,

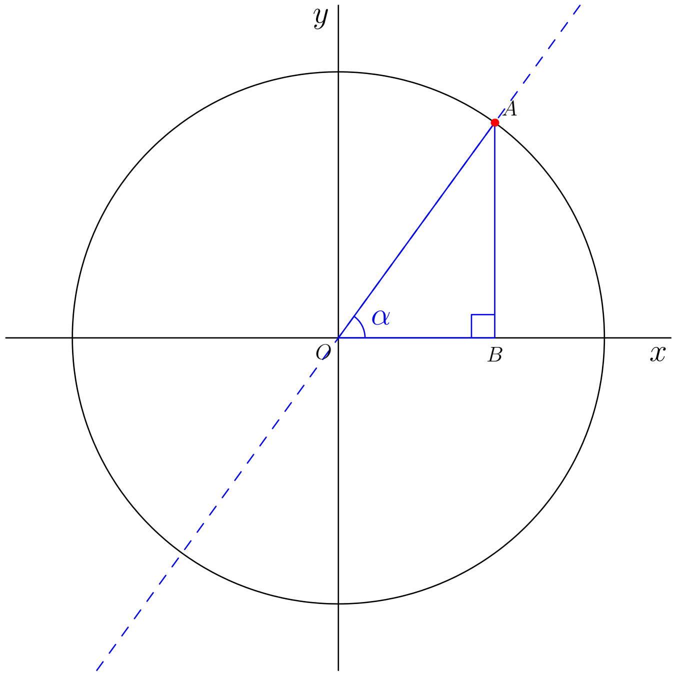
$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 - 16$$

זוהי (הנגזרת) פונקציה מעריכית עם בסיס 3, ולכן היא עולה. את המקסימום שלה בקטע $[0,1]$ היא תקבל, לכן, ב־1. לכן,

$$f'(x) \le 3^1 \cdot \ln 3 - 16 < 0$$

ולכן הנגזרת תמיד שלילית בקטע, ולכן הפונקציה f תמיד יורדת בקטע, ולכן אין לה יותר מפתרון אחד בקטע.

שאלה 5 (15 נק')



ישר g עובר דרך ראשית הצירים, וחותך את מעגל היחידה ברביע הראשון בנקודה A. מהנקודה A נוריד אנך אל ציר ה־x. נסמן ב־α את הזווית שבין ציר ה־x לישר g (ברביע הראשון; ברדיאנים). נסמן ב־T את המשולש $\triangle OAB$. מצאו את הזווית α עבורה שטח המשולש T מקסימלי.

אנו מעוניינים למקסם את שטח המשולש, ולכן נחפש את הפונקציה של שטח המשולש. נשים לב כי לפי הגדרת $\sin$ ו־$\cos$,

$$\begin{aligned} OB &= \cos\alpha \\ AB &= \sin\alpha \end{aligned}$$

ולכן, אם נסמן ב־$s(\alpha)$ את שטח המשולש, נקבל כי

$$s(\alpha) = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2} = \frac{\sin(2\alpha)}{4}$$

נגזור:

$$s'(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)}{2}$$

נשווה ל־0:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(2\alpha)}{2} &= 0 \\ \cos(2\alpha) &= 0 \\ 2\alpha &= \frac{\pi}{2} \\ \alpha &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

נגזור פעם נוספת:

$$\begin{aligned} s''(\alpha) &= -\sin(2\alpha) \\ s''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0 \end{aligned}$$

ולכן $\alpha = \frac{\pi}{4}$ היא נקודת מקסימום.

שאלה 6 (10 נק')

תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת $f(9) = 5$, $f'(9) = 2$. נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$. מצא/י את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 3$.

רמז: תוכל/י להשתמש בכלל השרשרת.

מתקיים:

$$\begin{aligned} g(3) &= f(3^2) = f(9) = 5 \\ g'(x) &= \left(f(x^2)\right)' = f'(x^2) \cdot 2x \\ g'(3) &= f'(9) \cdot 2 \cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

נסמן את המשיק ב־$\ell(x)$. לכן, מתקיים:

$$\ell(x) = g(3) + g'(3)(x-3) = 5 + 12(x-3)$$

שאלה 7 (10 נק')

חשב/י את האינטגרל המסוים הבא:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x+2)^2} dx$$

הפתרון מופיע בפתרון לתרגיל הבית האחרון.

שאלה 8 (5 נק')

מצא/י את הפונקציה הקדומה של הפונקציה $f(x) = 3x^2$, אם ידוע שערכה בנקודה $x = \frac{1}{2}$ הוא $\frac{3}{8}$.

מתקיים:

$$F(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

אבל

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+c=\frac{3}{8}$$

ולכן $c=\frac{1}{4}$, כלומר

$$F\left(x\right)=x^3+\frac{1}{4}$$

שאלה 9 (10 נק')

נתונה פונקציה $f\left(x\right)$ המקיימת $f\left(x\right)<1$ לכל x. תהי $h\left(x\right)$ פונקציה המקיימת $h'\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל x, וכן $h\left(1\right)=\frac{1}{4}$ ו־$h\left(4\right)=60$. מצא/י את השטח הכלוא בין הגרף של $f\left(x\right)$, הגרף של x^3 והישרים האנכיים $x=1$ ו־$x=4$.

נשים לב כי הפונקציה x^3 נמצאת בקטע $(1,4)$ מעל הפונקציה f. לכן:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4\left(x^3-f\left(x\right)\right)dx \\ &= \int_1^4 x^3dx-\int_1^4 f\left(x\right)dx \\ &= \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^4-h\left(x\right)|_1^4 \\ &= \frac{4^4}{4}-\frac{1}{4}-\left(h\left(4\right)-h\left(1\right)\right)=64-\frac{1}{4}-\left(60-\frac{1}{4}\right)=4 \end{aligned}$$

שאלה 10 (7 נק')

(א) תן/י דוגמה לפונקציה עם מקסימום מקומי שאינו מקסימום מוחלט (אפשר לצייר, אך יש להסביר).

פתרון למשל, $f\left(x\right)=\left|x^2-1\right|$. ב־$x=0$ יש נקודת מקסימום מקומית, אך ודאי שאין מקסימום גלובלי (כי הפונקציה שואפת ל־∞).

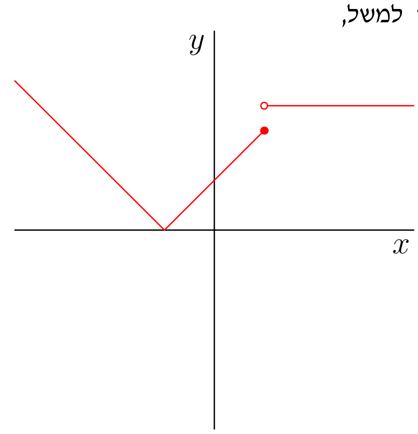
(ב) תן/י דוגמה לפונקציה המוגדרת על כל הישר, שערכה ב־-1 הוא -1, ערכה ב־1 הוא 1, אך שאין אף נקודה שבה ערכה הוא 0 (אפשר לצייר, אך יש להסביר).

פתרון למשל,

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

(ג) תן/י דוגמה לפונקציה רציפה וגזירה על כל הישר, מלבד נקודה אחת שבה היא אינה רציפה, ונקודה אחת אחרת שבה היא רציפה אך לא גזירה (אפשר לצייר, אך יש להסביר).

פתרון למשל,



שאלה 11 (10 נק')

יהיו $f(x), g(x)$ שתי פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי, $g(x)$ גזירה על כל הישר הממשי.
נגדיר $h_1(x) = f(x) + g(x)$ ו־$h_2(x) = f(x) g(x)$. ענה/י על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד:

(א) אם ידוע כי $h_1(x)$ גזירה על כל הישר הממשי ־ האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי?

פתרון כן. נשים לב כי מתקיים

$$f(x) = h_1(x) - g(x)$$

ולמדנו משפט לפיו הפרש פונקציות גזירות הוא גזיר.

(ב) אם ידוע כי $h_2(x)$ גזירה על כל הישר הממשי ־ האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי?

פתרון לא. למשל, יכול להיות ש־

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \\ g(x) &= 0 \\ h_2(x) &= |x| \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

ולכן gh_2 גזירות על כל הישר הממשי, אך f אינה.

שאלה 12 (3 נק')

מצא/י את הנקודות בהן הפונקציה הבאה אינה גזירה:

$$f(x) = \left|x^5 - x\right| + x^5$$

הנקודות ה"חשודות" באי־גזירות הן הנקודות שבהן הערך המוחלט מתאפס, כלומר $0, \pm 1$. מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} x = -1\\ \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \left(2x^5 - x\right) = -3\end{aligned}$$

ולכן הפונקציה אינה גזירה ב־-1. באופן דומה מראים שהיא אינה גזירה ב־0 וב־1.