קירוב לינארי

מציאת קירוב לינארי

בפרק זה של הקורס נלמד יישום של מושג הנגזרת ושל מושג הישר המשיק. ראינו במהלך הקורס כי בשביל למצוא את הישר המשיק בנקודה x_0, עלינו למצוא קודם כל את ערך הפונקציה ב־x_0 ואת ערך הנגזרת ב־x_0. אם הפונקציה האמורה היא $f\left(x\right)$, והישר המשיק הוא $g\left(x\right)=ax+b$, ראינו כי

$$a=f'\left(x_0\right)$$

וצריך להתקיים

$$g\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

כלומר

$$f'\left(x_0\right)x_0+b=f\left(x_0\right)$$

ולכן

$$b=f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)x_0$$

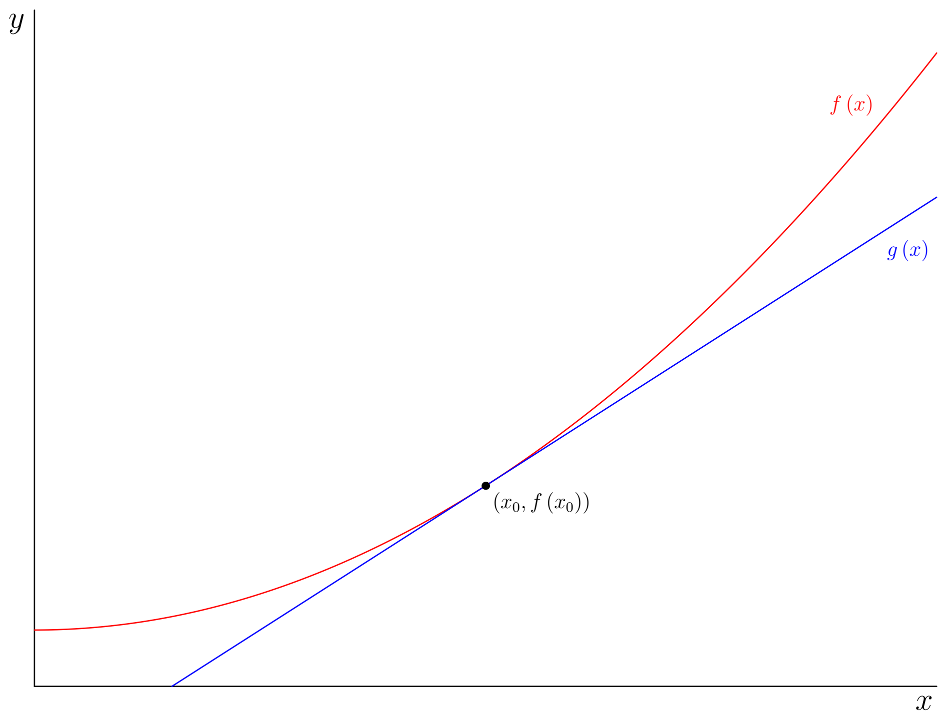
וכך ניתן לפתח נוסחה בודדת למציאת הישר המשיק:

$$g\left(x\right)=ax+b=f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)x_0=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

ובקיצור:

$$\boxed{g\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}$$

הבה נביט בגרף הבא (באדום) ובישר המשיק לו בנקודה x_0 כלשהי (בכחול):



מהגרף הנ"ל ניתן לראות כי בסביבת x_0, הפונקציה והמשיק כמעט זהים. לכן, נוכל להשתמש בפונקציית הישר המשיק כ**הערכה מקורבת** לפונקציה המקורית. מכיוון שהמשיק הוא קו ישר, נקרא להערכה כזו **קירוב לינארי**.

מה המניע לעשות זאת? נביט בדוגמה.

דוגמה 1

נקבע קירוב לינארי לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ בנקודה $x = 8$; ננסה להעריך באמצעות הקירוב הנ"ל את $\sqrt[3]{8.05}$ ואת $\sqrt[3]{25}$.

העבודה עצמה פשוטה מאד: נמצא את הקו המשיק בעזרת הנוסחה שמצאנו קודם לכן –

$$\begin{aligned} g(x) &= f(8) + f'(8)(x-8) \\ f(8) &= \sqrt[3]{8} = 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \\ f'(8) &= \frac{1}{3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{12} \\ g(x) &= 2 + \frac{x-8}{12} \end{aligned}$$

הקירוב מתקבל ע"י הצבה במשיק:

$$g(8.05) = 2 + \frac{0.05}{12} = 2\frac{1}{240}$$

$$g(25) = 2 + \frac{17}{12} = 3\frac{5}{12}$$

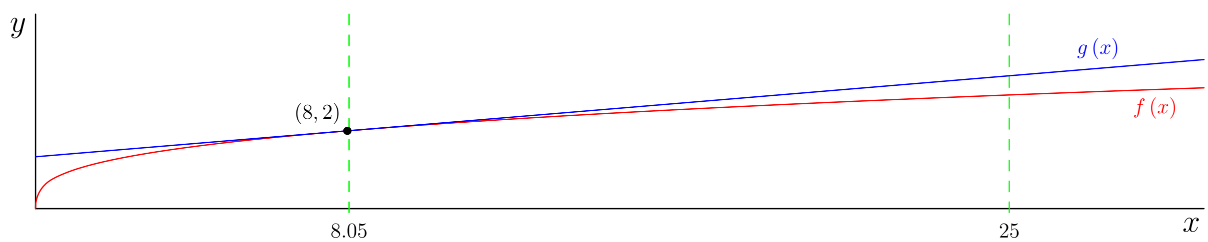
האם ההערכות שקיבלנו טובות? נשתמש במחשבון כדי לבדוק:

$$g(8.05) \simeq 2.004167 \qquad f(8.05) \simeq 2.004158$$

לא רע! ההערכה ב־8.05 ממש מוצלחת. מה לגבי ההערכה ב־25?

$$g(25) \simeq 3.416667 \qquad f(25) =\simeq 2.924018$$

לא משהו. אבל אם חושבים על זה קצת, זה לא צריך להפתיע שזהו המצב. בסביבה של 8, הפונקציה והמשיק נראים כמעט אותו הדבר – זאת מכיוון שהערך והשיפוע שלהם ב־8 זהה. עם זאת, עת אנו מתרחקים מ־8, שיפוע הפונקציה והמשיק ההוא כבר אינם דומים בהכרח, וסביר שהערך יתרחק. אפשר להבין זאת מהסקיצה:



מסקנה

הקירוב הלינארי עובד טוב יותר כאשר אנו מנסים לקרב את ערך הפונקציה בנקודה "מאד קרובה" לנקודת ההשקה. מה זה "מאד קרובה"? זה כבר מאד תלוי בפונקציה ובמספרים, אין בידינו כלי מוצלח לדעת. פשוט ננסה לחשוב על נקודת השקה נוחה כמה שיותר קרובה למספר שאנו רוצים להעריך.

דוגמה 2

הבה ננסה לקרב את $\sin 0.1$. לשם כך, נבחר כנקודה השקה את 0. מדוע שנעשה זאת? מאחר ו־0 הוא גם קרוב ל־0.1, אך גם נוח לחישוב – חשוב שנדע את ערך הפונקציה וערך הנגזרת בנקודה זו, כדי להצליח למצוא את המשיק! נסמן ב־g את המשיק ב־0. מתקיים:

$$g(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \sin 0 + \cos 0 \cdot x = x$$

ולכן

$$g(0.1) = 0.1$$

כלומר, הקירוב הלינארי של $\sin 0.1$ הוא 0.1.

למעשה, במקום 0.1 יכולנו לרשום כל מספר ממש קטן אחר (למשל: 0.007), ולקבל שהקירוב הלינארי שלו שווה לו עצמו; בזה הוכחנו, בעצם, שלכל x ממש קטן מתקיים

$$\sin x \simeq x$$

כלומר, x מאד דומה ל־$\sin x$ ל־x־ים מספיק קטנים. נסו במחשבון ותיווכחו!

תרגיל

מצאו קירוב לינארי לערך $\sqrt{65}$.

פתרון תרגיל

נחפש נקודת השקה נוחה; כלומר, נקודה קרובה ל־65, אך שאנו יודעים את השורש שלה. למשל: 64. נמצא את המשיק לגרף ב־64:

$$g(x) = f(64) + f'(64)(x-64)$$

כאשר $f(x) = \sqrt{x}$, ולכן $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. נקבל:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}}(x-64) \\ &= 8 + \frac{x-64}{16} = \frac{x}{16} + 4 \end{aligned}$$

ולכן

$$g(65) = \frac{65}{16} + 4 = 8\frac{1}{16}$$

ולכן $\sqrt{65} \simeq 8\frac{1}{16}$.