

סמסטר קיץ 2014

מועד א', 1.9.2014

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 3 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 10 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סך הנקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- רצוי לנמק את התשובות. במקומות בהם רשום במפורש לנמק, יש לעשות זאת.
- שימו לב כי בבחינה זו 3 עמודים, כולל עמוד זה.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f(x) = e^{-x^2/2}$ על-פי הסעיפים הבאים:

(א) מצא/י את תחום ההגדרה

(ב) מצא/י את תחומי הרציפות

(ג) קבע/י האם f זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה

(ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים

(ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי

(ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול

(ז) מצא/י את האסימפטוטות האנכיות והמשופעות

(ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה

(ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f , והאם היא חד-חד-ערכית

שאלה 2 (7 נק')

נניח כי $g(x) = x + 1$ הנה אסימפטוטה של $f(x)$ ב- ∞ . חשב/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f(x))^2}{x^2 + e\pi}$$

שאלה 3 (9 נק')

חשב/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{1/x}$$

שאלה 4 (15 נק')

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4}$$

נגדיר

(א) הוכיח/י הוכח כי f חד-חד-ערכית (רמז: מה ניתן לומר על הנגזרת של f ?).

(ב) מצא/י את הגבולות של $f(x)$ ב- $\pm\infty$.

(ג) הוכיח/י הוכח כי f הפיכה.

(ד) נחש/י את $f^{-1}(1)$ (רמז: זהו מספר שלם).

(ה) מצא/י את $(f^{-1})'(1)$.

שאלה 5 (10 נק')

תהי $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ רציפה ותהי $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ רציפה. נניח כי $g(0) = 0$ וכי $g(1) = 1$. הוכח/הוכיחי כי קיימת c בקטע $[0, 1]$ עבורה $f(c) = g(c)$.

שאלה 6 (7 נק')

הראי/הראה כי לכל x אי-שלילי מתקיים $2x \geq \ln(1 + 2x)$.

שאלה 7 (18 נק')

במעבדה נמצאות שתי מכונות לייצור קריפטונייט מוצק. הטמפרטורה במעבדה נמדדת במעלות קלווין (ומכל בחינה רלוונטית, חייבת להיות אי-שלילית). כאשר הטמפרטורה הנה T , מכונה א' מייצרת $1 + \sin T$ מיקרוגרם קריפטונייט מוצק ביום, ומכונה ב' מייצרת $1 + \cos T$ מיקרוגרם קריפטונייט מוצק ביום. מהי כמות הקריפטונייט המוצק המקסימלית שהמעבדה יכולה להפיק ביום?

שאלה 8 (5 נק')

מצא/י את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \arctan x$ בנקודה $x = 1$.

שאלה 9 (12 נק')

תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה על כל הישר, ותהי $g(x) = xf(x)$.

(א) הראה/הראי כי g גזירה ב-0.

(ב) נניח כי $f(0) = e$. נניח גם כי $G(x)$ הנה פונקציה קדומה של $g(x)$. מצא/י את $G''(0)$. הסבר/הסבירי את צעדיך.

שאלה 10 (12 נק')

(א) שרטט/י פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אי-זוגית, עולה-ממש ורציפה, שלה 2 נקודות אי-גזירות בדיוק.

(ב) שרטט/י פונקציה $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ גזירה וקמורה שאין לה נקודת קיצון בקטע.