סמסטר קיץ 2010

בחינה לדוגמה מס' 1

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 2 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 12 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- יש לנמק את התשובות. תשובה שאינה מנומקת כראוי עלולה לזכות בניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1 (30 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f\left(x\right)=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2}$ על־פי הסעיפים הבאים:

(א) מצא/י את תחום ההגדרה

(ב) מצא/י את תחומי הרציפות

(ג) קבע/י האם f זוגית, אי־זוגית, או אף אחד מאלה

(ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים

(ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי

(ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול

(ז) מצא/י את האסימפטוטת האנכיות והמשופעות

(ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה

(ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f, והאם היא חד־חד־ערכית

שאלה 2 (7 נק')

חשב/י את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to0}e^{\left(\frac{\sin x-\tan x}{x^{3}}\right)}$$

שאלה 3 (3 נק')

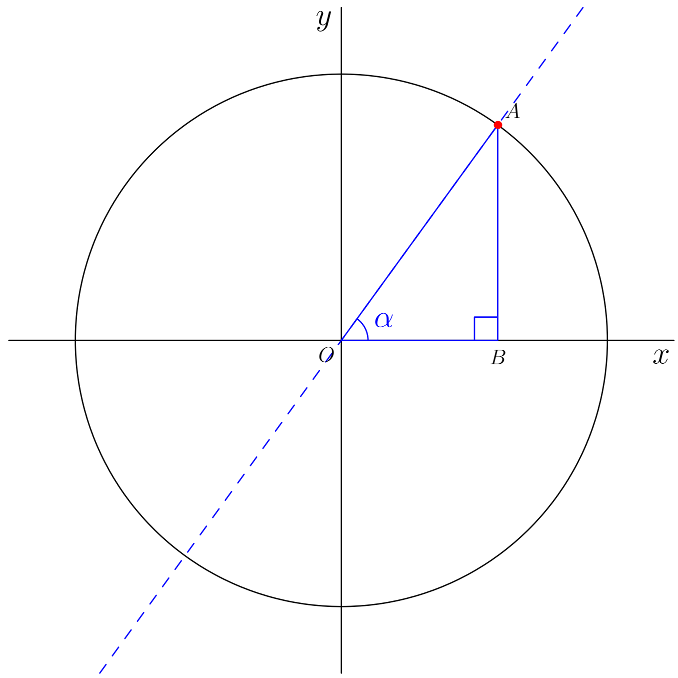
מספר המולקולות בקערה א' נתון ע"י הנוסחה $100t^{8}+5t^{3}+t^{2}$, ומספר המולקולות בקערה ב' נתון ע"י הנוסחה $t^{9}+t^{2}+t$, כאשר t מבטא את הזמן (בשניות) מתחילת הניסוי. נניח כי הניסוי נמשך זמן רב. היכן סביר להניח כי נמצא יותר מולקולות בתום הניסוי? יש לנמק!

שאלה 4 (10 נק')

(א) הראה/י כי למשוואה $3^{x}+7=16x$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,1]$.

(ב) הראה/י כי למשוואה $3^{x}+7=16x$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0,1]$.

שאלה 5 (15 נק')



ישר g עובר דרך ראשית הצירים, וחותך את מעגל היחידה ברביע הראשון בנקודה A. מהנקודה A נוריד אנך אל ציר ה־x. נסמן ב־α את הזווית שבין ציר ה־x לישר g (ברביע הראשון; ברדיאנים). נסמן ב־T את המשולש $\triangle OAB$. מצאו את הזווית α עבורה שטח המשולש T מקסימלי.

שאלה 6 (10 נק')

תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת $f(9) = 5$, $f'(9) = 2$. נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(x^2\right)$. מצא/י את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 3$.

רמז: תוכל/י להשתמש בכלל השרשרת.

שאלה 7 (10 נק')

חשב/י את האינטגרל המסוים הבא:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x+2)^2} dx$$

שאלה 8 (5 נק')

מצא/י את הפונקציה הקדומה של הפונקציה $f\left(x\right)=3x^{2}$, אם ידוע שערכה בנקודה $x=\frac{1}{2}$ הוא $\frac{3}{8}$.

שאלה 9 (10 נק')

נתונה פונקציה $f\left(x\right)$ המקיימת $f\left(x\right)<1$ לכל x. תהי $h\left(x\right)$ פונקציה המקיימת $h'\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל x, וכן $h\left(1\right)=\frac{1}{4}$ ו־$h\left(4\right)=60$. מצא/י את השטח הכלוא בין הגרף של $f\left(x\right)$, הגרף של x^{3} והישרים האנכיים $x=1$ ו־$x=4$.

שאלה 10 (7 נק')

(א) תן/י דוגמה לפונקציה עם מקסימום מקומי שאינו מקסימום מוחלט (אפשר לצייר, אך יש להסביר).

(ב) תן/י דוגמה לפונקציה המוגדרת על כל הישר, שערכה ב־-1 הוא -1, ערכה ב־1 הוא 1, אך שאין אף נקודה שבה ערכה הוא 0 (אפשר לצייר, אך יש להסביר).

(ג) תן/י דוגמה לפונקציה רציפה וגזירה על כל הישר, מלבד נקודה אחת שבה היא אינה רציפה, ונקודה אחת אחרת שבה היא רציפה אך לא גזירה (אפשר לצייר, אך יש להסביר).

שאלה 11 (10 נק')

יהיו $f\left(x\right),g\left(x\right)$ שתי פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי, $g\left(x\right)$ גזירה על כל הישר הממשי.

נגדיר $h_{1}\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ ו־$h_{2}\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$. ענה/י על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד:

(א) אם ידוע כי $h_{1}\left(x\right)$ גזירה על כל הישר הממשי ־ האם נובע כי $f\left(x\right)$ גזירה על כל הישר הממשי?

(ב) אם ידוע כי $h_{2}\left(x\right)$ גזירה על כל הישר הממשי ־ האם נובע כי $f\left(x\right)$ גזירה על כל הישר הממשי?

שאלה 12 (3 נק')

מצא/י את הנקודות בהן הפונקציה הבאה אינה גזירה:

$$f\left(x\right)=\left|x^{5}-x\right|+x^{5}$$