

תרגיל 13 – משפטי רול ולגראנז'

1. האם קיים פתרון למשוואה $e^x = x + 1$ בקרן $(0, \infty)$? (רמז: ביחרו $f(x) = e^x - x - 1$, הניחו שיש פתרון בקרן, השתמשו במשפט רול והגיעו לסתירה!)

2. האם קיים פתרון למשוואה $\ln(1+x) = x$ בקרן $(0, \infty)$?

3. האם קיים פתרון למשוואה $\sin x = 2x$ בקרן $(0, \infty)$?

4. הוכיחו:

(א) לכל $x < y$ מתקיים: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

(ב) לכל $0 < a < b$ מתקיים: $\frac{a-b}{a} < \ln\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a-b}{b}$

(ג) לכל $a < c < b$ מתקיים: $(e^{-b} - e^{-c})(c - a) > (e^{-c} - e^{-a})(b - c)$

(ד) לכל $-1 \leq a \leq b \leq 1$ מתקיים: $\arccos(b) - \arccos(a) \leq a - b$

5. הוכיחו את אי השוויון הבא:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

6. הוכיחו בעזרת משפט לגראנז', כי אם הנגזרת של פונקציה שווה ל-0 בכל נקודה בקטע $[a, b]$, אז f קבועה בקטע זה.

7. מצאו כמה פתרונות בדיוק יש למשוואה $x^5 + 10x = 15$.

8. נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0, 2]$ ומקיימת $f(0) = f(2)$ ו- $f(0) < f(1)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (0, 1)$ עבורה $f(c) = f(c+1)$.

רמז: ניתן להשתמש בפונקציית העזר $g(x) = f(x) - f(x+1)$, ולהיעזר במשפט ערך הביניים.

9. תהי $f(x)$ פונקציה חיובית גזירה ב- \mathbb{R} עבורה מתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ וגם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. הוכיחו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ עבורו $f'(c) = 0$. **רמז:** משפט רול.

10. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $(1, 3)$. נניח כי מתקיים $f(1) = f(2) = f(3)$. הראו כי קיימת $c \in (1, 3)$ עבורה $f''(c) = 0$. **רמז:** משפט רול.

11. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[-1, 1]$. נניח כי $f(-1) + f(1) = 2f(0)$. הראו כי קיימת $c \in (-1, 1)$ עבורה $f''(c) = 0$. **רמז:** משפטי לגראנז' ורול.

12. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים

$$(1+x)^{2011} > 1 + 2011x$$

13. הוכיחו כי לכל x חיובי מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} > 1 - \frac{x}{2}$$

14. הוכיחו כי לכל x חיובי מתקיים

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

15. הוכיחו כי לכל x חיובי מתקיים

$$\sin x < x$$

רמז כמעט הראנו זאת כבר בכיתה!