

תרגיל 15 – הישר המשיק

תזכורת: אמרנו בהרצאה כי משמעות ערך הנגזרת של פונקציה f בנקודה x_0 היא שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו. במילים אחרות, אם הישר המשיק בנקודה x_0 הוא

$$\ell(x) = ax + b$$

אז הנגזרת של הפונקציה בנקודה x_0 היא a . בנוסף, אמרנו שהישר המשיק באמת "נושק" לפונקציה בנקודה x_0 . במילים אחרות, גובה המשיק בנקודה x_0 זהה לגובה הפונקציה בנקודה זו. מסקנה זו מובילה אותנו למשוואה הבאה:

$$\ell(x_0) = f(x_0)$$

בדרך זו, אנו יכולים למצוא את הישר המשיק בנקודה מסוימת; כל שעלינו לדעת הוא ערך הפונקציה בנקודה הזו וערך הנגזרת בנקודה הזו.

דוגמה א

נביט בפונקציה $f(x) = x^2$ וננסה למצוא את הישר $\ell(x)$ המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$. בשביל למצוא אותו, קודם כל אנו צריכים לחשב את ערך הפונקציה ואת ערך הנגזרת בנקודה זו. מתקיים:

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(3) = 6$$

לכן, ה- a של הישר המשיק (השיפוע שלו) הוא 6, והגובה שלו בנקודה 3 הוא 9. נרשום זאת בצורה מסודרת. אם:

$$\ell(x) = ax + b$$

הוא הישר המשיק, אז מכיוון שכבר אמרנו שה- a הוא 6, נקבל ש-

$$\ell(x) = 6x + b$$

אך ידוע כי

$$\ell(3) = 9$$

ולכן

$$6 \cdot 3 + b = 9$$

$$b = -9$$

ולכן הישר המשיק הוא

$$\ell(x) = 6x - 9$$

דוגמה ב

נביט בפונקציה $f(x) = \sin(2x)$ וננסה למצוא את הישר $\ell(x)$ המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = \frac{\pi}{6}$. בשביל למצוא אותו, קודם כל אנו צריכים לחשב את ערך הפונקציה ואת ערך הנגזרת בנקודה זו. מתקיים:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) &= 2 \cos(2x) \\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{aligned}$$

לכן, a -ה של הישר המשיק (השיפוע שלו) הוא 1, והגובה שלו בנקודה $\frac{\pi}{6}$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$. נרשום זאת בצורה מסודרת. אם:

$$\ell(x) = ax + b$$

הוא הישר המשיק, אז מכיוון שכבר אמרנו שה- a הוא 1, נקבל ש-

$$\ell(x) = x + b$$

אך ידוע כי

$$\ell\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + b &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

ולכן הישר המשיק הוא

$$\ell(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

עכשיו תורכם

1. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3$ בנקודה $x = -2$.
2. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ בנקודה $x = 1$.
3. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ בנקודה $x = 2$.
4. * מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ המקביל (כלומר, בעל שיפוע זהה) לישר $y = -x - 5$.
5. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $x = 1$.
6. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.
7. * מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln |x|$ בנקודה $x = -e$.
8. מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ שבהן המשיק מקביל לציר ה- x .
9. מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $f(x) = \sin x$ שבהן המשיק מקביל לציר ה- x .
10. מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $f(x) = \tan x$ שבהן המשיק מקביל לציר ה- x .