

תרגיל 10 – רציפות

1. האם הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 47}{2x - 8}$ רציפה בנקודה 4?
2. האם הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 48}{2x - 8}$ רציפה בנקודה 4?
3. מצאו דוגמה לפונקציה רציונלית שאינה רציפה בנקודה אחת בלבד.
4. מצאו דוגמה לפונקציה רציונלית שאינה רציפה בשתי נקודות שונות.
5. מצאו דוגמה לפונקציה אלמנטרית שאינה פונקציה רציונלית, שאינה רציפה בנקודה אחת בלבד.
6. תהי f פונקציה, ונתון: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. תהי g פונקציה רציפה ב- b . נסו להסביר (במילים) מדוע מתקיים $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$
 נסו לחשוב: האם זה תלוי ברציפות של f ?
7. * הוכיחו כי לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש לפחות שורש אחד.
8. מצאו דוגמה לפולינום ממעלה 2 שאין לו שורש.
9. מצאו דוגמה לפולינום ממעלה 4 שאין לו שורש.
10. כמה פתרונות (בדיוק) יש למשוואה $\log_3 x = \frac{1}{4}$ בקטע $[1, 3]$?
11. כמה פתרונות (בדיוק) יש למשוואה $x^3 = 1273.93$ בקרן $[3, \infty)$?
12. הראו כי למשוואה $3^x + 7 = 16x$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0, 1]$.
13. האם קיים פתרון למשוואה $x^7 - 3x = 1$?
14. מצאו דוגמה לפונקציה זוגית ורציפה על הקטע $(-1, 1)$ שאין לה מקסימום מוחלט.
15. מצאו דוגמה לפונקציה אי-זוגית ורציפה על הקטע $(-1, 1)$ שאין לה מקסימום מוחלט וגם לא מינימום מוחלט.
16. מצאו דוגמה לפונקציה המוגדרת על כל הישר, שערכה ב- -1 הוא -1 , ערכה ב- 1 הוא 1 , אך שאין אף נקודה שבה ערכה הוא 0 .
17. יהיו $f(x), g(x)$ שתי פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי, $g(x)$ רציפה על כל הישר הממשי. נגדיר $h_1(x) = f(x)g(x), f(x) + g(x)$. ענו על כל אחד מבין הסעיפים הבאים בנפרד:
 (א) אם ידוע כי $h_1(x)$ רציפה על כל הישר הממשי – האם נובע כי $f(x)$ רציפה על כל הישר הממשי?
 (ב) אם ידוע כי $h_2(x)$ רציפה על כל הישר הממשי – האם נובע כי $f(x)$ רציפה על כל הישר הממשי?
18. תהי $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ רציפה. הוכיחו כי קיימת $c \in [0, 1]$ עבורה $f(c) = c^{17}$.
 רמז: הביטו בהוכחה של "משפט נקודת השבת".