

תרגיל 11 – הנגזרת

1. עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו האם היא גזירה ב-0 והאם היא גזירה ב-1:

$$f_1(x) = |x| \quad f_2(x) = |x - 1| \quad f_3(x) = |x| - 1 \quad f_4(x) = -|x - 1|$$

$$f_5(x) = |x| - |x - 1| \quad f_6(x) = |x^2| \quad f_7(x) = |x^2 - 1| \quad f_8(x) = \sqrt[5]{x}$$

נרשום את התוצאות בטבלה:

פונקציה	גזירה ב-0?	גזירה ב-1?	הערות
f_1	לא	כן	
f_2	כן	לא	
f_3	לא	כן	
f_4	כן	לא	
f_5	לא	לא	
f_6	כן	כן	זו בדיוק הפונקציה x^2
f_7	כן	לא	נסו לציירה!
f_8	לא	כן	שימו לב: הגבול חייב להיות סופי כדי שנאמר שהפונקציה גזירה!

2. חשבו לפי ההגדרה (אחת מהשתיים) את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2 + 5x + 8$.

פתרון נחשב על-פי ההגדרה הראשונה:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 8 - (x_0^2 - 5x_0 + 8)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + 5x - 5x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + 5(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 5)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 5) = 2x_0 + 5 \end{aligned}$$

מסקנה: $f'(x) = 2x + 5$.

3. חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos x$.

פתרון נחשב לפי ההגדרה השנייה:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= -\sin x_0 \end{aligned}$$

מסקנה: $f'(x) = -\sin x$.

4. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{4} \quad (\text{ג}) \quad f(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = (3x + 1) \left(5 - \frac{1}{x} \right) \quad (\text{ו}) \quad f(x) = \frac{3}{x + 2} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{2x - 5}{x + 3} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \quad (\text{ט}) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = (x^2 - 5) \left(\frac{1}{x} + 3 \right) \quad (\text{ז})$$

פתרונות

(א),(ב),(ג) גוזרים כל מחובר בנפרד. ב־א', למשל, נקבל $f'(x) = -x + 2x^2$.

(ד) לפי כלל המנה:

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-5)}{(x+3)^2} = \frac{11}{(x+3)^2}$$

(ה) בדומה:

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

(ו),(ז) אפשר לפתוח סוגריים ואז לגזור כרגיל, או לגזור לפי כלל המכפלה.

(ח),(ט) לפי כלל המנה.

5. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^2 \quad (\text{א}) \quad f(x) = (3x^2-2)(4+3x)^3 \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad (\text{ד}) \quad f(x) = \sqrt[5]{x^4} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{1}{(5x+2)^4} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \quad (\text{ז}) \quad f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2-3x} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}} \quad (\text{ט})$$

פתרונות

(א) פונקציה מורכבת:

$$f'(x) = 3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

(ב) לפי כלל המכפלה וכלל השרשרת:

$$f'(x) = 6x(4+3x)^3 + (3x^2-2) \cdot 3 \cdot (4+3x)^2 \cdot 3$$

(ה),(ו),(ז),(ח),(ט) אפשר לרשום את השורשים הללו כחזקות ולגזור כרגיל.

(ח) לפי כלל המנה וכלל המכפלה:

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right)(2-3x) + 3x\sqrt{x+1}}{(2-3x)^2}$$

6. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x \cos x \quad (\text{א}) \quad f(x) = \cot x \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \sin(2x) \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \sin(\cos x) \quad (\text{ד}) \quad f(x) = \cos(\sin x) \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = \sin^2(\cos^4 x) \quad (\text{ז}) \quad f(x) = \cos(\tan^3 x) \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \tan(\sin^2 x) \quad (\text{ט})$$

פתרונות

(א) $2 \cos(2x)$

(ב) לפי כלל המנה:

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(ג) לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

(ד) רק צריך לזכור שהמונה הוא בעצם 1 ומשם ממשיכים כרגיל.

(ה) פונקציה מורכבת:

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cos x$$

(ו) ממש כמו ב'ה'.

(ז) כאן יש הרכבה כפולה:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\sin^2 x)} \cdot 2 \sin x \cos x$$

(ח) בדומה ל'ז'.

(ט) פה יש הרבה הרכבות:

$$f'(x) = 2 \sin(\cos^4 x) \cdot \cos(\cos^4 x) \cdot 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x)$$

7. חשבו באמצעות המשפט אודות נגזרת של פונקציה הפוכה את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arccos x$.

פתרון כפי שעשינו בכיתה עם $\arcsin x$; $f(x) = \cos x$ גזירה בכל x ומתקיים $f'(x) = -\sin x$. נסמן $y = \cos x$; אז, $f^{-1}(x) = \arccos x$ (בגבולות $0 \leq x \leq \pi$) גזירה ב- y ומתקיים

$$\begin{aligned} (\arccos y)' &= (\arccos(\cos x))' = \frac{1}{\cos' x} = \frac{1}{-\sin x} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

8. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הפיכה, ונניח כי $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$. האם $f^{-1}(x)$ גזירה ב-2? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, חשבו את $(f^{-1})'(2)$.

פתרון לפי המשפט אודות נגזרת של פונקציה הפוכה, מאחר ו- f גזירה ב-1, f^{-1} גזירה ב- $f(1)$, כלומר ב-2. מתקיים:

$$(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

9. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \quad (\text{א}) \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{1-x}} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = (x^3+3x+4)^{20} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = e^{x \sin^2 x} \quad (\text{ד}) \quad f(x) = x \arctan(x^2) \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2-1}} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = 3^{4^x} \quad (\text{ז}) \quad f(x) = 2^{\arcsin(3x)} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \ln(x^7 + 3x^6 + 3) \quad (\text{ט})$$

פתרונות

(א) הרכבה פשוטה:

$$f'(x) = 20(x^3+3x+4)^{19} \cdot (3x^2+3)$$

(ב) הרכבה על גזירה של פונקציה רציונלית:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+1}{1-x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2x(1-x) + (x^2+1)}{(1-x)^2}\right)$$

(ג) כנ"ל: (הפעם נייפה את זה קצת)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \left(\frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \right) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \\ &= -\frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)} = -\frac{4x}{x^4-1} \end{aligned}$$

(ה) כלל המכפלה וכלל השרשרת:

$$f'(x) = \arctan(x^2) + \frac{x}{1+x^2} \cdot 2x$$

(ו) לפי כלל השרשרת וכלל המכפלה:

$$f'(x) = e^{x \sin^2 x} \cdot \sin^2 x \cdot x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

(ז) לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = \frac{1}{x^7 + 3x^6 + 3} \cdot (7x^6 + 18x^5)$$

(ח) לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = 2^{\arcsin(3x)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3$$

(ט) לפי כלל השרשרת:

$$f'(x) = 3^{4^x} \cdot \ln 3 \cdot 4^x \cdot \ln 4$$

10. הוכיחו או הפריכו: פונקציה שאינה חסומה ב- $[a, b]$ אינה גזירה בקטע הסגור $[a, b]$.

פתרון הטענה נכונה. אם f גזירה, אז היא גם רציפה, ולכן, לפי משפט ויירשטראס, היא חסומה.

11. מצאו דוגמה לפונקציה רציפה וגזירה על כל הישר, מלבד נקודה אחת שבה היא אינה רציפה, ונקודה אחת אחרת שבה היא רציפה אך לא גזירה.

פתרון דוגמה פשוטה: $f(x) = |x| + \frac{1}{x-1}$.

12. * ידוע כי $f(x)$ הציפה ב- $x = 2$, ומקיימת

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \pi - 3(x - 2)}{x - 2} = 0$$

חשבו את $f(2)$ ואת $f'(2)$.

פתרון מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - \pi}{x - 2} - \frac{3(x - 2)}{x - 2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - \pi}{x - 2} - 3 \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \pi}{x - 2} = 3$$

מכיוון שהמכנה שואף ל- 0 , גם המונה חייב לשאוף ל- 0 (אחרת הגבול לא היה 3). כלומר:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - \pi) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pi$$

אבל f הציפה ב- 2 ולכן $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, כלומר $f(2) = \pi$. ולבסוף:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \pi}{x - 2} = 3$$

13. יהיו $f(x), g(x)$ שתי פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי, $g(x)$ גזירה על כל הישר הממשי.

נגדיר $h_1(x) = f(x) + g(x)$ ו- $h_2(x) = f(x)g(x)$. ענו על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד:

(א) אם ידוע כי $h_1(x)$ גזירה על כל הישר הממשי – האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי?

פתרון מתקיים $f(x) = h_1(x) - g(x)$, וכהפרש של שתי פונקציות גזירות, f גזירה.

(ב) אם ידוע כי $h_2(x)$ גזירה על כל הישר הממשי – האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי?

פתרון לא. להלך דוגמה נגדית: $f(x) = |x|, g(x) = 0, h_2(x) = 0$.

14. * תנו דוגמה לפונקציה שאינה גזירה באינסוף נקודות שונות.

דוגמה הפונקציה $f(x) = |\sin x|$.