תרגיל 12 – גבולות (iii) – הערות

1. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ **(ב)** $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}-1\right)$ **(ג)** $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

(ד) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\log_2(x+1)}{e^{x-1}-x}$ **(ה)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$ **(ו)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+x}{\sin x-x}$

(ז) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{-x}\cdot e^x$ **(ח)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{-x}}$ **(ט)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(4x)}{e^{6x}-6x-1}$

פתרונות

(א) לפי להופיטל:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}\overset{L}{=}\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3\cdot 2^2}{2\cdot 2}=3$$

(ב) ראשית נפריד את הגבולות ואז נצמצם:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}-1\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-1=\lim_{x\to 2}(x+2)-1=4-1=3$$

(ג) אפשר לצמצם או להשתמש בלהופיטל.

(ד) נשים לב כי גם המונה וגם המכנה שואפים ל־0. לכן, לפי להופיטל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\log_2(x+1)}{e^{x-1}-x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-\frac{1}{(x+1)\ln 2}}{e^{x-1}-1}$$

קיבלנו גבול רציונלי עם מונה ששואף למספר כלשהו שונה מ־0 ומכנה ששואף ל־0. במקרה זה אנו "תקועים", ועלינו לחזור חזרה ולבדוק גבולות מימין ומשמאל. מתקיים:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\log_2(x+1)}{e^{x-1}-x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-\frac{1}{(x+1)\ln 2}}{e^{x-1}-1}=\infty$$

וזאת כי המונה והמכנה חיוביים בסביבה ימנית של 1. בדומה:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-\log_2(x+1)}{e^{x-1}-x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-\frac{1}{(x+1)\ln 2}}{e^{x-1}-1}=-\infty$$

וזאת כי המונה חיובי והמכנה שלילי בסביבה שמאלית של 1. על־כן הגבול האמור אינו קיים.

(ה) מתקיים:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

(ו) נשים לב כי המונה וגם המכנה שואפים ל־∞ או ל־$-\infty$. לכן, לפי להופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+x}{\sin x-x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x+1}{\sin x-1}$$

אך האם נוכל לחשב גבול זה? קצת קשה. ננקוט כאן, לכן, בגישה אחרת: הוצאת גורם משותף בכפייה. נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)}{x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}+1}{\frac{\sin x}{x}-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

וזאת מאחר והגבול של $\frac{\sin x}{x}$ באינסוף הוא 0.

(ז) נשים לב כי הגבול הנ"ל הוא מהצורה "$0\cdot\infty$". על־כן, נעביר אותו לצורה של "$\frac{\infty}{\infty}$" באופן הבא:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{e^{-x}}\overset{L}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot(-1)}{e^{-x}\cdot(-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2\sqrt{-x}e^{-x}}=0$$

(ח) מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^x=\infty$$

(ט) נשים לב כי המונה וגם המכנה שואפים ל־0. לכן, לפי כלל להופיטל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(4x)}{e^{6x}-6x-1}&\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{2\sin(4x)\cdot\cos(4x)\cdot4}{6e^{6x}-6}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin(8x)}{6\left(e^{6x}-1\right)}\\&\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{4\cos(8x)\cdot8}{6\left(6e^{6x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{32\cos(8x)}{36e^{6x}}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

2. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\sin x-\sin(2x)}$ **(ב)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\cot x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ **(ג)** $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x}$ **(ד)** $\lim_{x\to2\pi}\frac{\cos(8x)-1}{\sin x}$

פתרונות

(א) המונה שואף ל־0 והמכנה לא, ולכן כל הגבול שואף ל־0.

(ב) המונה והמכנה שואפים שניהם ל־0. נפעיל את כלל להופיטל:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\cot x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\overset{L}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=4$$

(ג) המונה והמכנה שואפים שניהם ל־0. נפעיל את כלל להופיטל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x} &\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}}{3\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^3 x}}{3\sin^2 x}\\ &\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^4 x}\cdot(-\sin x)}{6\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^5 x}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ד) המונה והמכנה שאופים שניהם ל־0. נפעיל את כלל להופיטל:

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\cos(8x)-1}{\sin x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 2\pi}\frac{-8\sin(8x)}{\cos x}=0$$

3. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to 0}e^{-x}\ln x$ **(ב)** $\lim_{x\to 1}e^{-x}\ln x$ **(ג)** $\lim_{x\to\infty}e^{-x}\ln x$

(ד) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{x}$ **(ה)** $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}-e^x}{x}$ **(ו)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}-e^x}{x}$

(ז) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ **(ח)** $\lim_{x\to\pi}\frac{x-\sin x}{x^3}$ **(ט)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}$

פתרונות

(א) גבול זה הנו מהצורה "1 כפול $-\infty$" ולכן הוא שווה ל־$-\infty$.

(ב) מתקיים בפשטות:

$$\lim_{x\to 1}e^{-x}\ln x=e^{-1}\ln 1=0$$

(ג) גבול זה הנו מהצורה "0 כפול ∞". נעביר את הגבול לצורה נוחה יותר ונשתמש בלהופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\ln x=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^x}=0$$

(ד) נשים לב כי המונה והמכנה שואפים שניהם ל־0. נשתמש בלהופיטל ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-e^x}{1}=3e^0-e^0=2$$

(ה) אמנם במכנה יש לנו גבול ששואף ל־∞, אך במונה יש לנו גבול מהצורה "$\infty - \infty$" ואפריורית איננו יודעים על כך דבר. עם זאת, נשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-e^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}e^{x}\left(e^{2x}-1\right)=\infty$$

ולכן גם המונה שואף ל־∞. על־כן נוכל להשתמש בלהופיטל, ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}-e^{x}}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}-e^{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}e^{x}\left(3e^{2x}-1\right)=\infty$$

(ו) הגבול במכנה שואף ל־$-\infty$ אך הגבול במונה שואף ל־0. לכן:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(e^{3x}-e^{x}\right)=0\cdot 0=0$$

(ז) נשים לב כי המונה והמכנה שואפים שניהם ל־0. לפי להופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

(ח) נציב:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{\pi-\sin\pi}{\pi^3}=\frac{\pi}{\pi^3}=\frac{1}{\pi^2}$$

(ט) נשים לב כי המונה והמכנה שואפים שניהם ל־∞ (למה?). לפי להופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}(1-\cos x)\cdot\frac{1}{3x^2}=0$$

כאשר הגבול האחרון שווה ל־0 מכיוון שהוא גבול של מכפלת פונקציה חסומה בפונקציה השואפת ל־0 (מסקנה ממשפט הסנדביץ').

4. בצלחת פטרי א' יש בתחילת ניסוי מיליון חיידקי אלפא, ובצלחת פטרי ב' יש שני חיידקי אלפא. התנאים בצלחת א' מאפשרים לחיידקים שם להתרבות ללא הגבלה, כאשר קצב הגדילה הוא מיליון חיידקים בשנייה. התנאים בצלחת ב' גם הם מאפשרים לחיידקים שם להתרבות ללא הגבלה, כאשר שם בכל שנייה כמות החיידקים מוכפלת. **לאחר דקה אחת** מתחילת הניסוי ־ איפה סביר שיהיו יותר חיידקים, בצלחת א' או בצלחת ב'?

בלי שום ספק בצלחת ב'.

5. בניסוי שתי קערות. כמות הנבגים בקערה א' נתונה ע"י הנוסחה $n_1(t)=t^3-t$, וכמות הנבגים בקערה ב' נתונה ע"י הנוסחה $n_2(t)=t^2+100t+9$, כאשר t מייצג את מספר השניות שעברו מתחילת הניסוי. נניח כי הניסוי נמשך זמן רב. איפה סביר שיהיו יותר נבגים בתום הניסוי?

בלי שום ספק בקערה א'.

6. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + x^{2^{999}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^x}$$

הגבול הנו 0.