תרגיל 14 – חקירת פונקציה – הערות

1. מצאו את נקודות הקיצון (המקומיות), תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ **(ב)** $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ **(ג)** $f(x) = x^6$

(ד) $f(x) = \cos^2 x \star$ **(ה)** $f(x) = 2x + \cos x$ **(ו)** $f(x) = \cot x$

פתרונות

(א) נגזור: $f'(x) = 2x - 3$. $f'(x) > 0$ כאשר $x > 1.5$ ו־$f'(x) < 0$ כאשר $x < 1.5$, ולכן תחום העלייה הוא $(1.5, \infty)$ ותחום הירידה הוא $(-\infty, 1.5)$. מכאן שב־(1.5) יש נקודת מינימום. ניתן למצוא אותה על ידי הצבה: $(1.5, 1.75)$.

(ב) נגזור: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. נמצא את שורשי הפולינום הנ"ל

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} 1/3 \\ 1 \end{cases}$$

ומכיוון שהפרבולה מחייכת, הנגזרת חיובית, ולכן הפונקציה עולה, בתחומים $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ ו־$(1, \infty)$, והנגזרת שלילית, ולכן הפונקציה יורדת, בתחום $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$. מכאן ב־$\frac{1}{3}$ מתקבלת נקודת מקסימום וב־1 נקודת מינימום. נמצא אותן על ידי הצבה:

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{104}{27}\right) \qquad (1, -4)$$

(ג) גרף פונקציה זו נראה ממש כמו פרבולה – ולכן הפונקציה יורדת עד 0 ועולה החל מ־0, וב־0 מתקבל מינימום, שגובהו 0.

(ד) מתקיים $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$. אם $f'(x) > 0$, אז $\sin 2x < 0$, וזה נכון כאשר

$$2x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$$

(עבור $k \in \mathbb{Z}$) כלומר כאשר

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right)$$

וזהו תחום העליה של הפונקציה. בדומה, תחום הירידה של הפונקציה הוא

$$x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$

מכאן ניתן למצוא בקלות את נקודות הקיצון.

(ה) מתקיים $f'(x) = 2 - \sin x$. $f'(x) > 0$ אם ורק אם $2 > \sin x$, אבל זה נכון לכל x, ולכן הפונקציה עולה לכל x (וממילא אין נקודות קיצון).

(ו) מתקיים

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

וקל לראות כי בכל נקודה שבה $\cot x$ מוגדר, הנגזרת שלילית, ולכן הפונקציה יורדת (וממילא אין נקודות קיצון).

2. מצאו את נקודות הקיצון (המקומיות), תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ **(ב)** $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ **(ג)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{-1 + x - x^2}$

(ד) $\star$ $f(x) = \sin^2 x$ **(ה)** $f(x) = x \ln x$ **(ו)** $f(x) = xe^x$

פתרונות

(א) מתקיים $f'(x) = 3x^2 - 12x$. חישוב פשוט מראה כי הנגזרת חיובית עד 0 ומ־4 ולכן הפונקציה עולה שם, ב־0 יש מקסימום וב־4 יש מינימום.

(ב) נשים לב כי הפונקציה מוגדרת בתחום $[0, \infty)$. מתקיים $f'(x) = (-1) \cdot \sqrt{x} + (1-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$. הנקודות החשודות למינימום/מקסימום הן הנקודות בהן $\frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0$, ואלו הן בדיוק הנקודות בהן $1 - 3x = 0$, כלומר $x = \frac{1}{3}$. עבור $0 < z < \frac{1}{3}$ מתקיים $f'(z) = \frac{1-3z}{2\sqrt{z}} > 0$, ולכן הפונקציה עולה בתחום $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. כמו־כן, עבור $w > \frac{1}{3}$ מתקיים $f'(w) = \frac{1-3w}{2\sqrt{w}} < 0$, ולכן הפונקציה יורדת בקרן $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. נסיק מכך ש־$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ היא נקודת מקסימום.

נשים לב גם כי הנגזרת לא מוגדרת בנקודה 0, ולכן גם זו נקודה חשודה כנקודת קיצון. מאחר והפונקציה עולה בתחום $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, נסיק כי ב־$0$ הפונקציה מקבלת מינימום.

(ג) נשים לב כי הפונקציה מוגדרת לכל x המקיים $-1+x-x^2\neq 0$, אך בדיקה קצרה תגלה שזה מתקיים לכל x. מתקיים:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)\left(-1+x-x^2\right)-\left(x^2-x-1\right)(1-2x)}{\left(-1+x-x^2\right)^2} \\ &= \frac{-2x+2x^2-2x^3+1-x+x^2-\left(x^2-x-1-2x^3+2x^2+2x\right)}{\left(-1+x-x^2\right)^2} \\ &= \frac{-2x+1-(-1+2x)}{\left(-1+x-x^2\right)^2}=\frac{-4x+2}{\left(-1+x-x^2\right)^2} \end{aligned}$$

נשים לב כי הנגזרת מוגדרת בכל מקום שבו הפונקציה מוגדרת, כלומר לכל x. $f'(x)=0$ אם ורק אם $2=4x$, כלומר $x=\frac{1}{2}$. לכל $x<\frac{1}{2}$ מתקיים $2-4x>0$ ולכן הפונקציה עולה לכל $x<\frac{1}{2}$. לכל $x>\frac{1}{2}$ מתקיים $2-4x<0$ ולכן הפונקציה יורדת לכל $x>\frac{1}{2}$. מאחר ומתקיים:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1}{-1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{5}{3}$$

נסיק כי $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$ היא נקודת מקסימום.

(ד) מתקיים $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$. הנקודות בהן $\sin 2x=0$ הן הנקודות

$$2x=\pi k$$

עבור $k\in\mathbb{Z}$. כלומר, הנקודות $x=\frac{\pi}{2}k$ הן הנקודות החשודות כנקודות קיצון. מתקיים $f''(x)=2\cos 2x$. נבדוק עבור k מסוים מתי הנגזרת השנייה של נקודה חשודה היא חיובית ומתי שלילית; אם הנגזרת השנייה חיובית, אז $\cos 2\frac{\pi}{2}k=\cos\pi k>0$, ולכן k זוגי. נסמן $k=2n$. לכן, נקודות המינימום של הפונקציה הן בדיוק הנקודות המתקבלות ב־$x=\pi n$ עבור n שלם, כלומר הנקודות מהצורה $(\pi n,0)$. בדומה, אם הנגזרת השנייה שלילית, אז $\cos\pi k<0$, ולכן k אי־זוגי. נסמן $k=2n+1$. לכן, נקודות המקסימום של הפונקציה הן בדיוק הנקודות המתקבלות ב־$x=\pi n+\frac{\pi}{2}$ עבור n שלם, כלומר הנקודות מהצורה $\left(\pi n+\frac{\pi}{2},1\right)$. מכאן אפשר למצוא תחומי עלייה וירידה בקלות יחסית.

(ה) נשים לב כי הפונקציה מוגדרת בתחום $(0,\infty)$. מתקיים $f'(x)=\ln x+\frac{x}{x}=\ln x+1$. הנגזרת שווה ל־0 כאשר $\ln x=-1$, כלומר כאשר $x=\frac{1}{e}$. לכל $x\in\left(0,e^{-1}\right)$ הנגזרת תצא שלילית ולכן הפונקציה יורדת, ובדומה $\left(e^{-1},\infty\right)$ הנו תחום עלייה שלה.

(ו) מתקיים $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$. הנגזרת שווה ל־0 אם ורק אם $1+x=0$, כלומר $x=-1$. לכל $x>-1$ הנגזרת חיובית והפונקציה עולה, ולכל $x<-1$ הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת. לכן לפונקציה יש נקודת מינימום ב־-1, והיא $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$.

3. מצאו את תחומי הקמירות והקעירות, ואת נקודות הפיתול (אם יש) של הפונקציות בסעיף (א) ובסעיף (ו) מהסעיף הקודם (סעיף 2).

פתרונות

(א) חישוב מראה: $f''(x) = 6x - 12$. הנגזרת השנייה מוגדרת על כל הישר; לכן, הפונקציה קעורה כאשר $f''(x) < 0$, כלומר כאשר $x < 2$, וקמורה כאשר $f''(x) > 0$, כלומר כאשר $x > 2$. לכן, ב־2 יש לפונקציה נקודת פיתול.

(ו) חישוב מראה: $f''(x) = (2+x)e^x$. הנגזרת השנייה מוגדרת על כל הישר; לכן, הפונקציה קעורה כאשר $f''(x) < 0$, כלומר כאשר $x < -2$, וקמורה כאשר $f''(x) > 0$, כלומר כאשר $x > -2$. לכן, ב־-2 יש לפונקציה נקודת פיתול.

4. חיקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה (כלומר, מצאו תחום הגדרה, בדקו האם הפונקציה זוגית או אי־זוגית, מצאו נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון מקומיות, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, ובסופו של דבר, שרטטו סקיצה של הפונקציה. בעזרת הגרף ששרטטתם בסעיף הקודם, קבעו מהי תמונת f, וקבעו האם f היא חד־חד ערכית)

(א) $f(x) = x^3 - x$ **(ב)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **(ג)** $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

(ד) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$ **(ה)** $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ **(ו)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(ז) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$ **(ח)** $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ **(ט)** $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

הערה פתרונות חלקיים לחקירת פונקציות ינתנו בדף נפרד.

5. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \frac{Ax^2}{x-3}$$

נתון שלפונקציה זו יש אסימפטוטה משופעת ב־$y = x + 3$. מצאו את A, ולאחר מכן חיקרו את הפונקציה שקיבלתם חקירה מלאה (כמו בסעיף הקודם).

פתרון (ללא חקירה) לפי המשפט

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax^2}{x(x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{x-3}$$

ולפי כלל האצבע, נקבל כי $A = 1$.

6. חיקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה (כלומר, מצאו תחום הגדרה, בדקו האם הפונקציה זוגית או אי־זוגית, מצאו נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון מקומיות, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, ובסופו של דבר, שרטטו סקיצה של הפונקציה. בעזרת הגרף ששרטטתם בסעיף הקודם, קבעו מהי תמונת f, וקבעו האם f היא חד־חד ערכית)

(א) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$ **(ב)** $f(x) = (x-1)\,e^{2x}$ **(ג)** $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$

(ד) $f(x) = e^{2x} - e^{x}$ **(ה)** $f(x) = \cos(2x-1)$ **(ו)** $f(x) = \frac{|x+1|}{|x|-1}$

(ז) $\star$ $f(x) = x^3 - |x|^3$ **(ח)** $\star$ $f(x) = \frac{|x|-1}{e^{|x|-1}}$

הערה פתרונות חלקיים לחקירת פונקציות ינתנו בדף נפרד.

7. הביטו בפונקציה $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$.

(א) האם יש לה אסימפטוטה אנכית ב־0? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מצאו אותה.

פתרון נחשב את הגבול ב־0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{\sin x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$$

ולכן אין אסימפטוטה אנכית ב־0.

(ב) האם יש לה אסימפטוטה משופעת ב־∞? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, מצאו אותה.

פתרון נשתמש במשפט על אסימפטוטות משופעות. אם יש כזו, נאמר $g(x) = ax + b$, היא צריכה לקיים

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1 \\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0 \end{aligned}$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת ב־∞, והיא $g(x) = x$.

(ג) האם פונקציה (כלשהי) יכולה להיחתך עם אסימפטוטה אנכית שלה? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, כמה נקודות חיתוך יכולות להיות להן לכל היותר?

פתרון כן, פונקציה יכולה להיחתך עם אסימפטוטה אנכית שלה. ראינו דוגמה לזה בשיעור, ולהלן דוגמה נוספת:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

יש לה אסימפטוטה אנכית ב־0 והיא חותכת אותה ב־$(0,0)$. יכולה להיות לכל היותר נקודת חיתוך אחת של פונקציה עם אסימפטוטה אנכית נתונה.

(ד) האם פונקציה (כלשהי) יכולה להיחתך עם אסימפטוטה משופעת שלה? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, כמה נקודות חיתוך יכולות להיות להן לכל היותר?

פתרון כן, פונקציה יכולה להיחתך עם אסימפטוטה משופעת שלה – אפילו אינסוף פעמים. למשל, הפונקציה הנתונה לנו בשאלה זו חותכת את האסימפטוטה המשופעת שלה באינסוף אינסוף פעמים; כי הרי למשוואה

$$x + \frac{\sin x}{x} = x$$

יש אינסוף פתרונות (בדיוק $x = \pi k$, $k \neq 0$).