תרגיל 14 – פתרון מורחב לשאלות חקירת פונקציה

פתרונות לשאלה 4 (סעיפים א׳–ו׳, ח׳)

סעיף א

תחום הגדרה כל המספרים.

תחום רציפות כל המספרים.

זוגיות נבדוק:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -\left(x^3 - x\right) = -f(x)$$

ועל־כן הפונקציה אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = 0^3 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - x &= 0 \\ x^3 &= x \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ולכן הנקודה היחידה הנה $(0,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות המקיימות $3x^2 - 1 = 0$, כלומר $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. נקודות חשודות בפיתול: $x = 0$. נציב הכל בטבלה:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$-$	inf	$+$		$+$

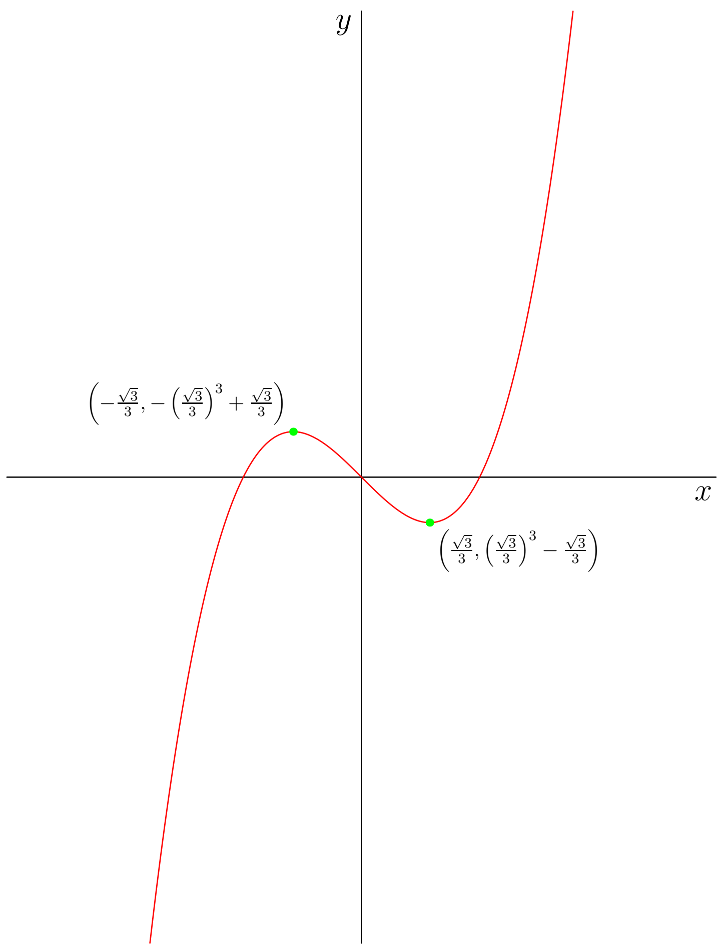
והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מינימום $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, מקסימום $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, פיתול $(0,0)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות אם יש אסימפטוטות, הן רק ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{x}=\infty$$

וזו סתירה, ועל־כן אין אסימפטוטה ב־∞. כנ"ל ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



קל לראות כי תמונת f הנה $\mathbb{R}$ והיא אינה חח"ע.

סעיף ב

תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

זוגיות נבדוק:

$$f(-x)=(-x)+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

ועל־כן הפונקציה אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \text{not defined}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0\\ x+\frac{1}{x} &= 0\\ x^2+1 &= 0 \end{aligned}$$

ולמשוואה זו אין פתרון, ולכן אין נקודות חיתוך עם הצירים.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{1}{x^2}\\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות המקיימות $1-\frac{1}{x^2}=0$, כלומר $x=\pm 1$. נקודות חשודות בפיתול: אין. נציב הכל בטבלה:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$-$	X	$+$		$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מקסימום $(-1,-2)$, מינימום $(1,2)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־0; אכן,

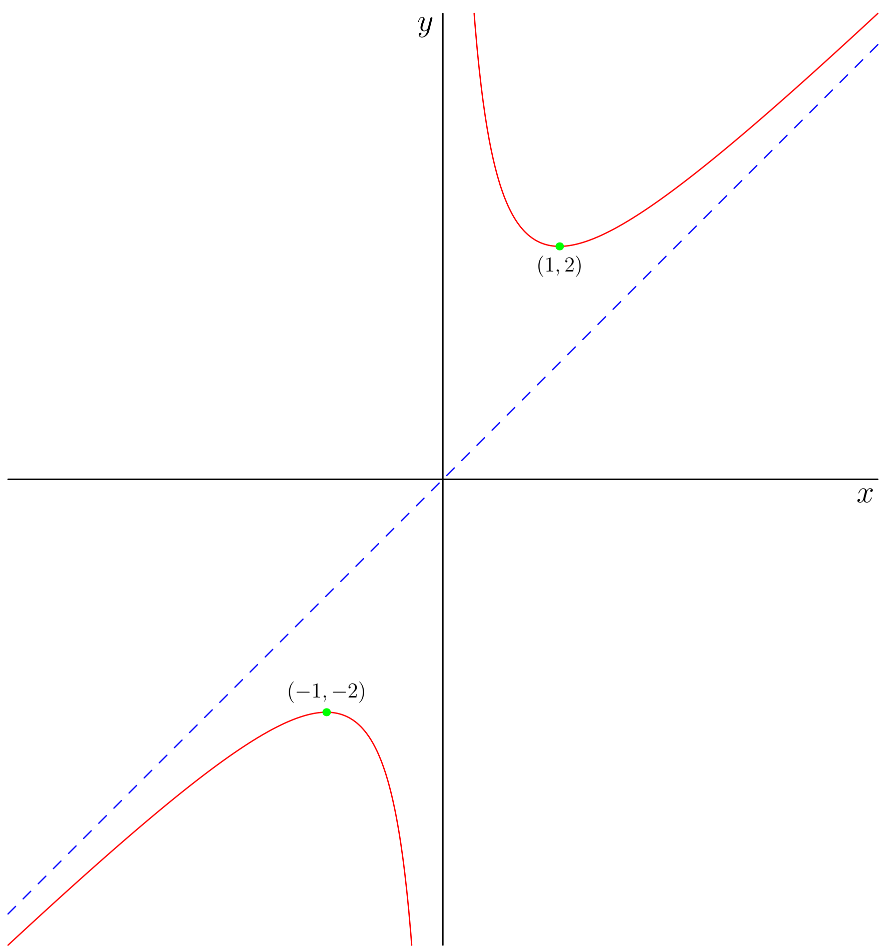
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=1 \\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \end{aligned}$$

ולכן $g(x)=x$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה: (ממנה ניתן לראות כי תמונת f הנה $\{y \mid y\le -2 \text{ or } y\ge 2\}$, ובבירור היא אינה חח"ע)



סעיף ג

תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

זוגיות נבדוק:

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)(-x-1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

לא נראה שזה שווה ל־$f(x)$ או לשלילתו. על־כן ננסה הצבות:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2} \\ f(-2) &= \frac{1}{(-2)(-3)}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית ואינה אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \text{not defined}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{1}{x(x-1)} &= 0 \end{aligned}$$

ולמשוואה זו אין פתרון, ולכן אין נקודות חיתוך עם הצירים.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} \\ f''(x) &= -\frac{2x^2(x-1)^2-(2x-1)\left(2x(x-1)^2+2x^2(x-1)\right)}{x^4(x-1)^4} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות המקיימות $-\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}=0$, כלומר $x=\frac{1}{2}$. נקודות חשודות בפיתול: נצטרך לפשט את הביטוי מעט –

$$f''(x)=-\frac{2x^2(x-1)-(2x-1)\left(2x(x-1)+2x^2\right)}{x^4(x-1)^3}$$

כדי שזה יתאפס צריך שהמונה יתאפס. כלומר:

$$\begin{aligned}
2x^2(x-1)-(2x-1)\left(2x(x-1)+2x^2\right) &= 0\\
2x^3-2x^2-(2x-1)\left(2x^2-2x+2x^2\right) &= 0\\
2x^3-2x^2+(1-2x)\left(4x^2-2x\right) &= 0\\
2x^3-2x^2+4x^2-2x-8x^3+4x^2 &= 0\\
-3x^3+3x^2-x &= 0\\
3x^2-3x+1 &= 0\\
x_{1,2} &= \frac{3\pm\sqrt{9-12}}{6}
\end{aligned}$$

כלומר, אין פתרון, ולכן אין נקודות החשודות בפיתול. נסדר הכל בטבלה (מספיק להציב במונה ־ המכנה תמיד חיובי בשני המקרים! ולא לשכוח את המינוס שמופיע משמאל לשבר בשתי הנגזרות)

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2
$f'(x)$	$\nearrow$	X	$\nearrow$	max	$\searrow$	X	$\searrow$
$f''(x)$	$+$	X	$-$		$-$	X	$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודה הבאה: מקסימום $\left(\frac{1}{2},-4\right)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־0; אכן,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot(-1)=-\infty$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. עתה נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־1; אכן,

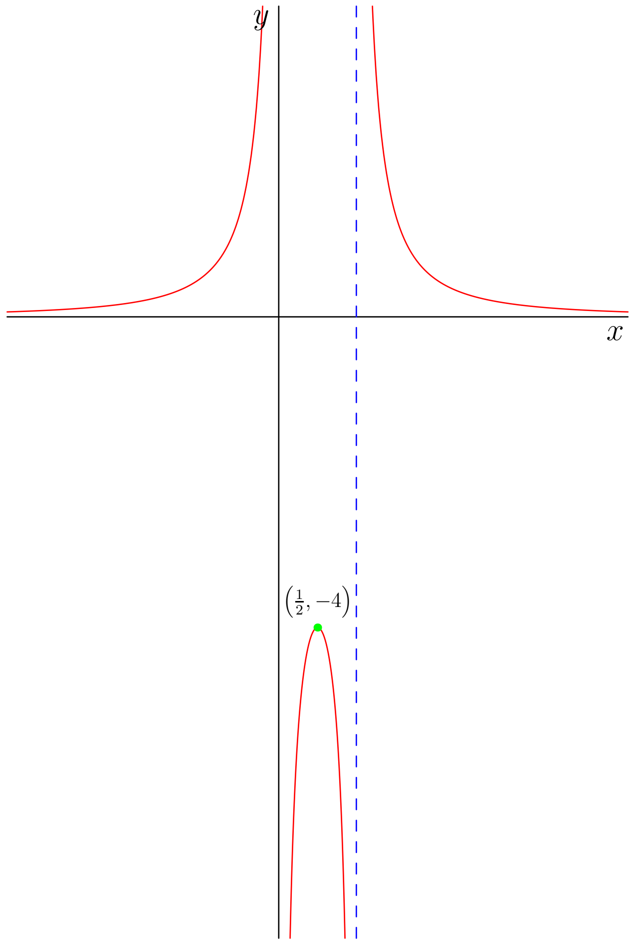
$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=\infty$$

ולכן קיימת גם כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2(x-1)}=0\\
b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)=0
\end{aligned}$$

ולכן $g(x)=0$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\{y \mid y \leq -4 \text{ or } y \geq 0\}$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ד

תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} \\ f(-x) &= \left(\frac{-x+2}{-x-2}\right)^2 = \frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4} \end{aligned}$$

לא נראה ש־$f(-x)$ שווה ל־$f(x)$ או לשלילתו. על־כן ננסה הצבות:

$$\begin{aligned} f(1) &= \left(\frac{3}{-1}\right)^2 = 9 \\ f(-1) &= \left(\frac{1}{-3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית ואינה אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \left(\frac{2}{-2}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 &= 0 \\ \frac{x+2}{x-2} &= 0 \\ x+2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

ועל־כן נקודות החיתוך הן $(0,1)$ ו־$(-2,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+4)(x-2)^2-(x+2)^2(2x-4)}{(x-2)^4} = 2\frac{(x+2)(x-2)^2-(x+2)^2(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= 2\frac{(x+2)(x-2)-(x+2)^2}{(x-2)^3} = 2\frac{x^2-4-x^2-4x-4}{(x-2)^3} = -8\frac{x+2}{(x-2)^3} \\ f''(x) &= -8\frac{(x-2)^3-3(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^6} = -8\frac{x-2-3(x+2)}{(x-2)^4} = 16\frac{x+4}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות המקיימות $-8\frac{x+2}{(x-2)^3}=0$, כלומר $x=-2$. נקודות חשודות בפיתול: הנקודות המקיימות $16\frac{x+4}{(x-2)^4}=0$, כלומר $x=-4$. נסדר הכל בטבלה:

x	-5	-4	-3	-2	0	2	3
$f'(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	X	$\searrow$
$f''(x)$	$-$	inf	$+$		$+$	X	$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מינימום $(-2,0)$, פיתול $\left(-4,\frac{1}{9}\right)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־2; אכן,

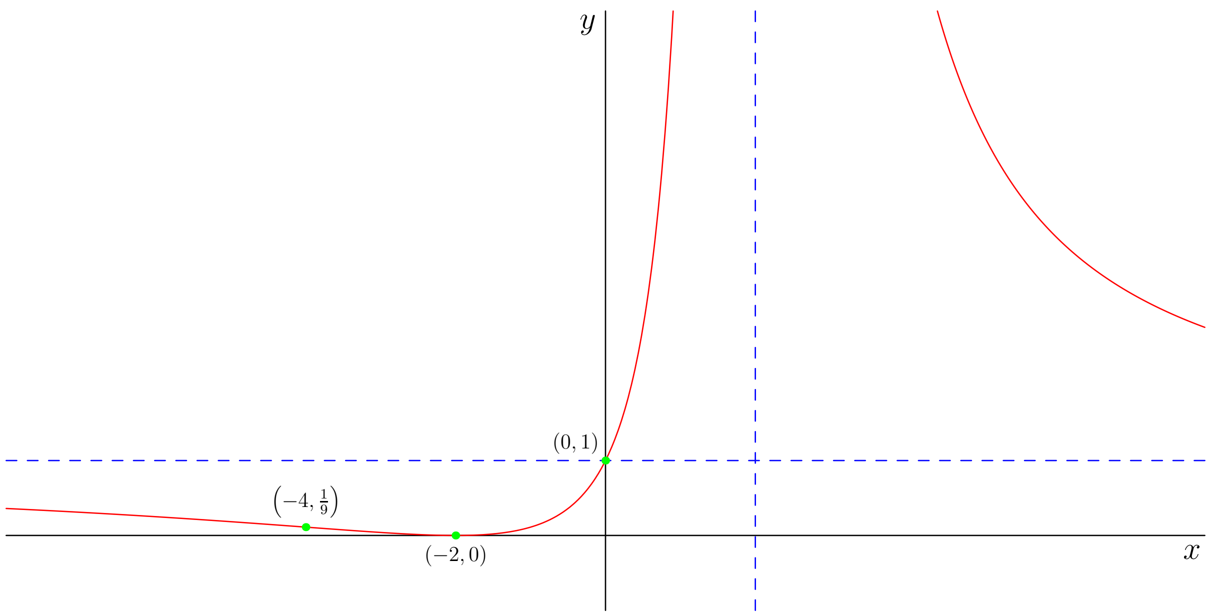
$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=\lim_{x\to 2^+}(x+2)^2\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=16\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ - תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x(x-2)^2}=0 \\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=1 \end{aligned}$$

ולכן $g(x)=1$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $[0,\infty)$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ה

תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2^2}{2+1}=\frac{4}{3} \\ f(-2) &= \frac{(-2)^2}{-2+1}=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית ואינה אי־זוגית (ניתן לדעת זאת מיד מאחר וב־-1 היא אינה מוגדרת, אך ב־1 כן ־ זה לא סימטרי!)

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ועל־כן נקודת החיתוך היחידה הנה $(0,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2-2\left(x^2+2x\right)(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= 2\frac{(x+1)^2-\left(x^2+2x\right)}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות המקיימות $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0$, כלומר $x=0$ או $x=-2$. אין נקודות חשודות בפיתול.

נסדר הכל בטבלה:

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$-$	X	$+$		$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מינימום $(0,0)$, מקסימום $(-2,-4)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־-1; אכן,

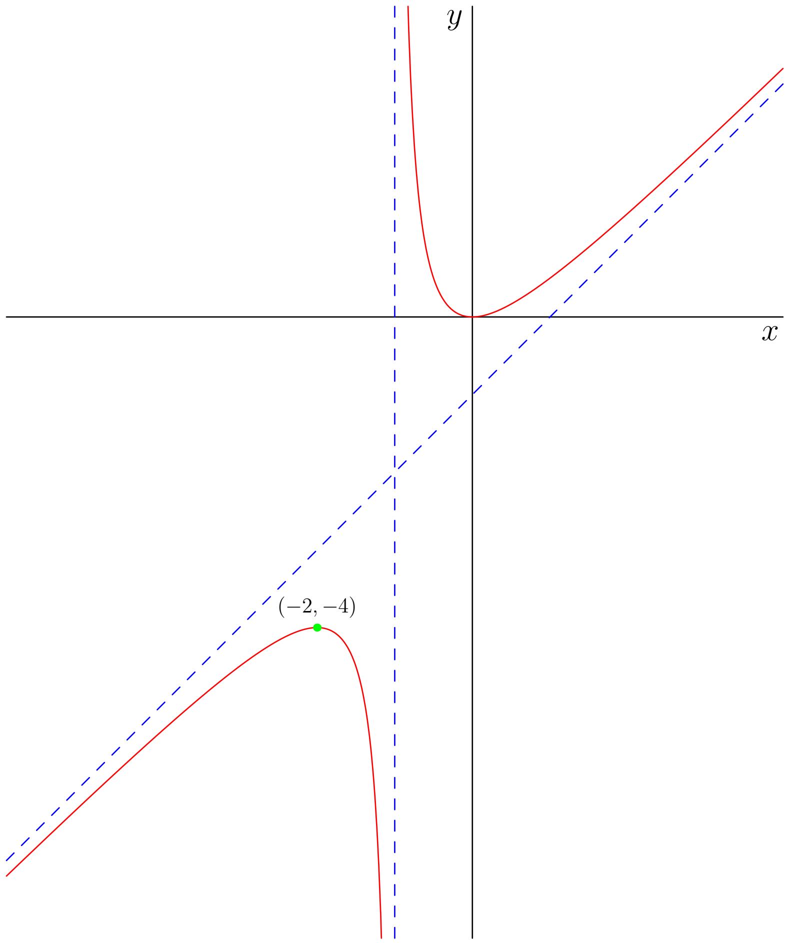
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}x^2\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=1\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=\infty$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ - תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=1\\ b&=\lim_{x\to\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=-1\end{aligned}$$

ולכן $g(x)=x-1$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\{y \mid y \leq -4 \text{ or } y \geq 0\}$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ו

תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

זוגיות נבדוק:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

ועל־כן הפונקציה הנה אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ועל־כן נקודת החיתוך היחידה הנה $(0,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} \\ f''(x) &= \frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^4-3x^2\right)\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} \\ &= \frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)-4x\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3} \\ &= \frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות המקיימות $\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0$, כלומר $x=0$ או $x=\pm\sqrt{3}$. רק $x=0$ חשודה בפיתול. נסדר הכל בטבלה:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$											
$f''(x)$											

רגע, אין הכרח לעבוד ככה. נצטרך להציב המון נקודות... אבל **כאן יכולה לעזור לנו העובדה שגילינו קודם לכן, לפיה f הנה אי־זוגית!** פשוט נבדוק הכל רק במחצית הימנית של הגרף, ונדע שהמחצית השמאלית שלו נגדית (ולכן עלייה בצד ימין תהיה עלייה בצד שמאל, ירידה בצד ימין תהיה ירידה בצד שמאל, נקודת מקסימום בצד ימין תהיה נקודת מקסימום בצד שמאל, נקודות מינימום בצד ימין תהיה נקודת מקסימום בצד שמאל, תחום קמור בצד ימין יהיה תחום קעור בצד שמאל ותחום קעור בצד ימין יהיה תחום קמור בצד שמאל). זה מה שנקבל:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	?	$\searrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f''(x)$	?	$-$	X	$+$		$+$

לכן, תחום הירידה בצד ימין הוא $\left(0,\sqrt{3}\right)$ ועל־כן (מאי־זוגיות) בצד שמאל תחום הירידה הוא $\left(-\sqrt{3},0\right)$; לכן ניתן לומר סה"כ שתחום הירידה של הפונקציה הוא $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$. תחום העלייה בצד ימין הוא $\left(\sqrt{3},\infty\right)$, ולכן תחום העלייה בצד שמאל הוא $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$. מכאן נובע שב־$0$ אין לנו נקודת קיצון, ולכן נקודות הקיצון הן, לאחר הצבה בפונקציה: מינימום $\left(\sqrt{3},\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{2}\right)$, מקסימום $\left(-\sqrt{3},-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{2}\right)$.

תחום הקמירות בצד ימין הוא $(1,\infty)$ ולכן תחום ה<u>קעירות</u> בצד שמאל הוא $(-\infty,-1)$; תחום הקעירות בצד ימין הוא $(0,1)$ ולכן תחום הקמירות בצד שמאל הוא $(-1,0)$; מכאן נובע כי $(0,0)$ הנה נקודת פיתול (כמובן שניתן לעשות זאת גם בדרך ה"רגילה" - זה פשוט מעט ארוך).

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־-1; אכן,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{x^2-1} &= \lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{x-1}\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{(x+1)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{(x+1)}=\infty\end{aligned}$$

בדומה, קיימת אסימפטוטה אנכית ב־1:

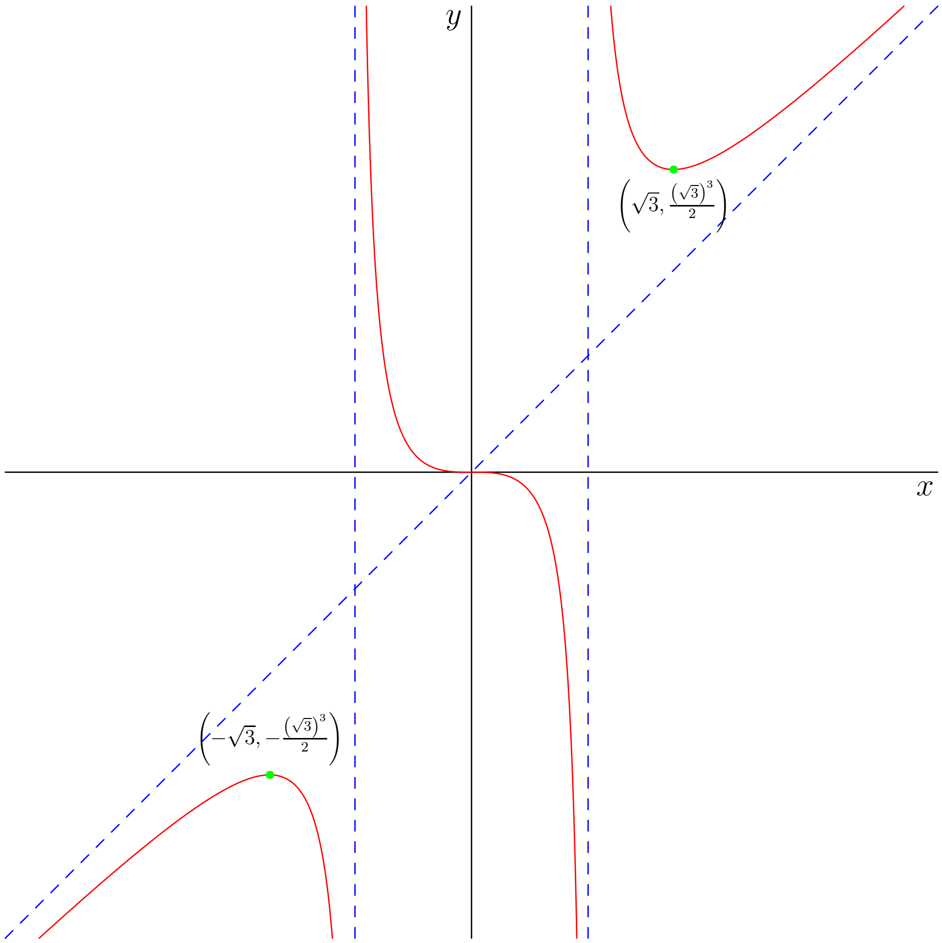
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{x^3}{x^2-1} &= \lim_{x\to1^+}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3}{x+1}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)}=\infty\end{aligned}$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ - תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1\\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=0\end{aligned}$$

ולכן $g(x)=x$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\mathbb{R}$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ח

תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{3}{1^2}=3 \\ f(-2) &= \frac{-5}{(-3)^2}=-\frac{5}{9} \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית או אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \frac{0-1}{(0-1)^2}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x-1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ועל־כן נקודות החיתוך הן $(0,-1)$ ו־$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1)^2-2(2x-1)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3}=\frac{-2x}{(x-1)^3} \\ f''(x) &= \frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{6x-2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4x+2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: $x=0$. נקודות חשודות בפיתול: $x=-\frac{1}{2}$. נסכם הכל בטבלה:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	X	$\searrow$
$f''(x)$	$-$	inf	$+$		$+$	X	$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מינימום $(0,-1)$, פיתול $\left(-\frac{1}{4},-\frac{24}{25}\right)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־1; אכן,

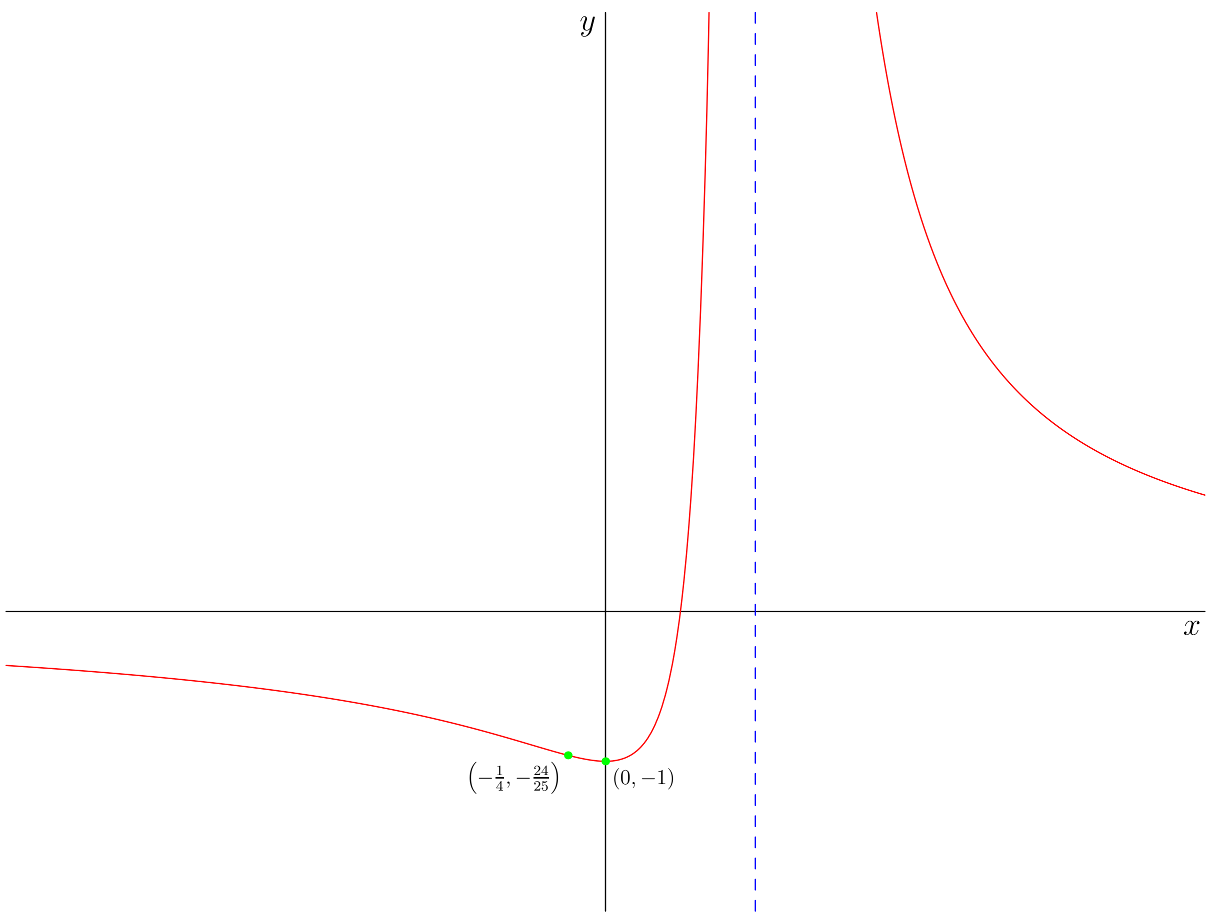
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{2x-1}{(x-1)^2} &= \lim_{x\to1^+}(2x-1)\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)^2}\\ &= 1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty\end{aligned}$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0\\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0\end{aligned}$$

ולכן $g(x)=0$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $[-1,\infty)$, ובבירור היא אינה חח"ע.

פתרונות לשאלה 6 (סעיפים א'—ג', ה', ז'—ח')

סעיף א

תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

זוגיות נבדוק:

$$f(-x) = (-x)e^{\frac{1}{(-x)^2}} = -xe^{\frac{1}{x^2}} = -f(x)$$

ועל־כן הפונקציה הנה אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \text{not defined}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ xe^{\frac{1}{x^2}} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

אך $x=0$ נמצא מחוץ לתחום ההגדרה, ועל־כן אין נקודות חיתוך עם הצירים כלל.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x^2}} + xe^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-2x^{-3}\right) = \left(1-2x^{-2}\right)e^{\frac{1}{x^2}} \\ f''(x) &= 4x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}} + \left(1-2x^{-2}\right)e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-2x^{-3}\right) \\ &= \left(4x^{-3}-2x^{-3}+4x^{-5}\right)e^{\frac{1}{x^2}} = \left(2x^{-3}+4x^{-5}\right)e^{\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות עבורן $2x^{-2}=1$, כלומר $x=\pm\sqrt{2}$. נקודות חשודות בפיתול: הנקודות עבורן $2x^{-3}+4x^{-5}=0$, כלומר $x^2+2=0$, ולכן אין נקודות כאלו. נסכם הכל בטבלה:

x	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$-$	X	$+$		$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מינימום $\left(\sqrt{2},\sqrt{2e}\right)$, מקסימום $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2e}\right)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־0; אכן,

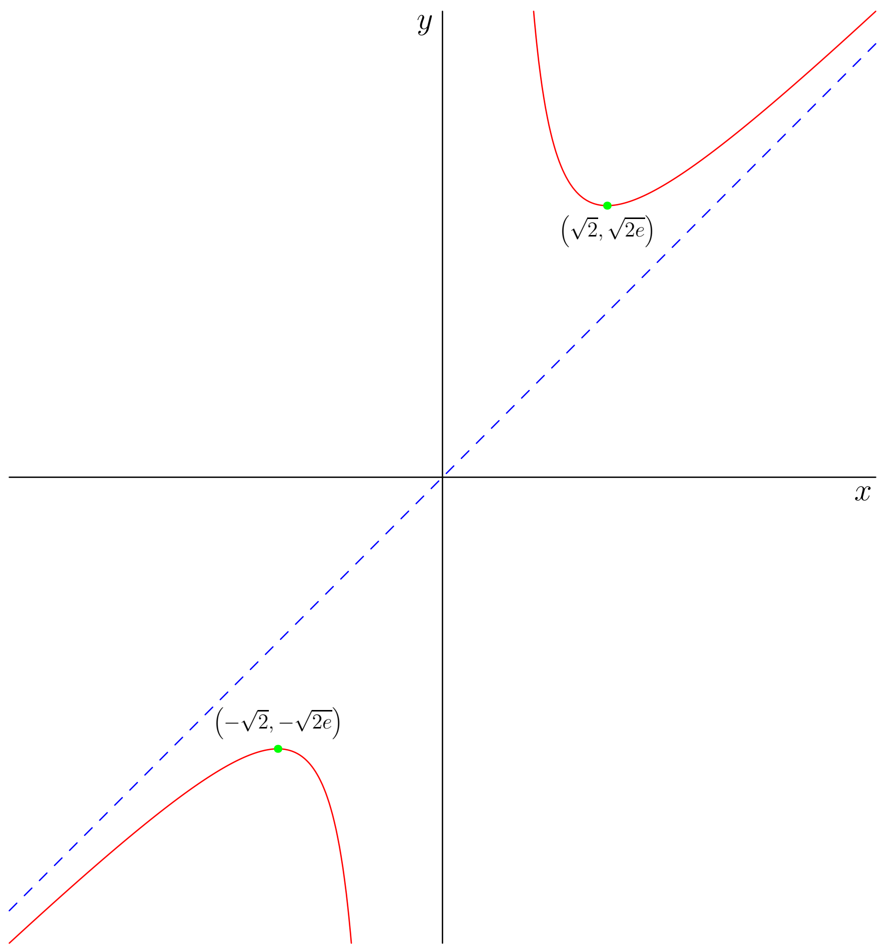
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-2x^{-3}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x} = \infty \\ &= 1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty\end{aligned}$$

ולכן קיימת כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x) = ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1 \\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x^2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-2x^{-3}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x} = 1\cdot0 = 0\end{aligned}$$

ולכן $g(x) = x$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\{y \mid y \leq -\sqrt{2e} \text{ or } y \geq \sqrt{2e}\}$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ב

תחום הגדרה $\mathbb{R}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}$.

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1-1)e^{2} = 0 \\ f(-1) &= (-1-1)e^{-2} = -\frac{2}{e^{2}} \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית או אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = (0-1)e^{0} = -1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x-1)e^{2x} &= 0 \\ x-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

ועל־כן נקודות החיתוך הן $(0,-1)$ ו־$(1,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x} \\ f''(x) &= 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: $x=\frac{1}{2}$. נקודות חשודות בפיתול: $x=0$. נסכם הכל בטבלה:

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	inf	$+$		$+$

והצבה בפונקציה תתן את הנקודות הבאות: מינימום $\left(\frac{1}{2},-\frac{e}{2}\right)$, פיתול $(0,-1)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי העלייה, הירידה, הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x) = ax + b$; לפי המשפט,

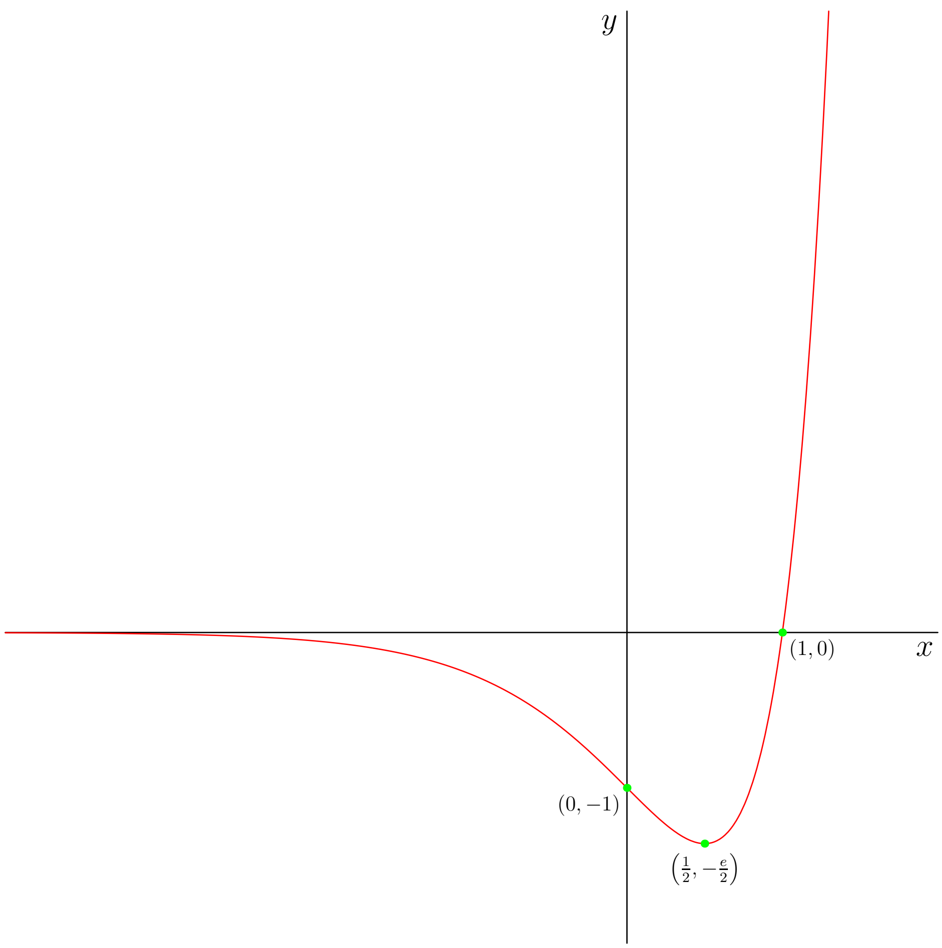
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} e^{2x} = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} e^{2x} = \infty$$

וזו סתירה ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב־∞. נבדוק ב־$-\infty$: תהי $g(x) = ax + b$; לפי המשפט,

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} e^{2x} = 1 \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 1 \cdot 0 = 0$$

ולכן $g(x) = 0$ הנה אסימפטוטה משופעת במינוס אינסוף.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\left[-\frac{e}{2}, \infty\right)$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ג

תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

תחום רציפות $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \arctan\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \arctan 3 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \arctan\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right) = \arctan\frac{1}{3} \neq \pm\arctan 3 \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית או אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \arctan\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 0 \\ \frac{1+x}{1-x} &= \tan 0 \\ \frac{1+x}{1-x} &= 0 \\ 1+x &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

ועל־כן נקודות החיתוך הן $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ו־$(-1,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\right) \\ &= \frac{2}{\left(1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\right)\cdot(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2} \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: אין; הנגזרת תמיד חיובית, ולכן הפונקציה תמיד עולה. נקודות חשודות בפיתול: $x=0$. נסכם הכל בטבלה:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	X	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	inf	$-$	X	-

והצבה בפונקציה תתן את הנקודה הבאה: פיתול $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. מהטבלה מתבררים גם תחומי הקמירות והקעירות.

אסימפטוטות ראשית נבדוק קיומה של אסימפטוטה אנכית ב־1; אכן,

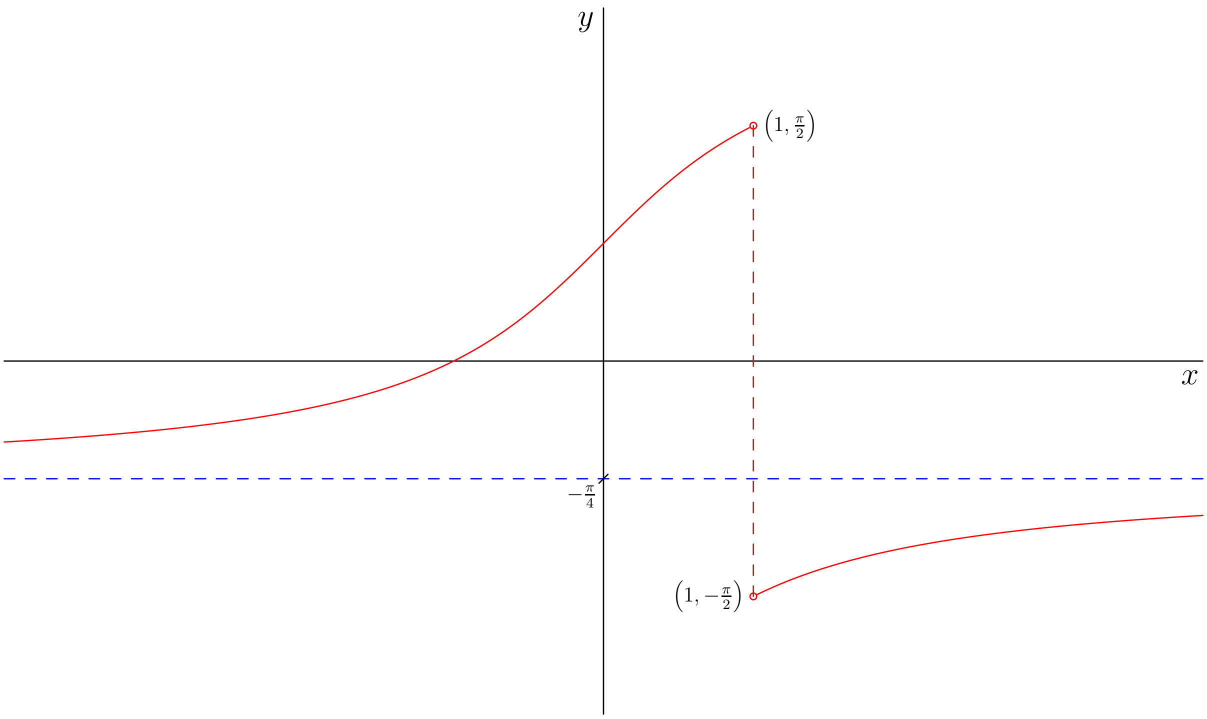
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\to1^+}\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ולכן אין כזו אסימפטוטה. נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ - תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}=0\\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ולכן $g(x)=\frac{\pi}{4}$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\left\{y \mid y\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right) \text{ or } y\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$, וכי היא חח"ע. נוכיח כי היא חח"ע גם באופן פורמלי (למרות שלא התבקשנו): יהיו x_1,x_2 מספרים, ונניח כי $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$. נקבל:

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\right) &= \arctan\left(\frac{1+x_2}{1-x_2}\right)\\
\frac{1+x_1}{1-x_1} &= \frac{1+x_2}{1-x_2}\\
1+x_1-x_2-x_1x_2 &= 1-x_1+x_2-x_1x_2\\
2x_1 &= 2x_2\\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

ולכן היא חח"ע.

סעיף ה

תחום הגדרה $\mathbb{R}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}$.

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \cos 0 = 1 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \cos\left(-2\right) \neq \pm 1 \end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית או אי־זוגית.

מחזוריות למרות שלא שאלו אותנו על מחזוריות, נשים לב כי לפונקציה יש מחזור π; אכן:

$$\begin{aligned} f\left(x+\pi\right) = \cos\left(2\left(x+\pi\right)+1\right) &= \cos\left(2x+2\pi+1\right) \\ &= \cos\left(2x+1\right) = f\left(x\right) \end{aligned}$$

מכאן ואילך נחקור, אם כן, אך ורק את הקטע $[0,\pi]$. הקטע $[\pi, 2\pi]$, למשל, יראה בדיוק כמוהו.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f\left(0\right) = \cos\left(-1\right) = \cos 1$$

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= 0 \\ \cos\left(2x-1\right) &= 0 \\ 2x-1 &= \frac{\pi}{2}+\pi k \\ 2x &= 1+\frac{\pi}{2}+\pi k \\ x &= \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k \end{aligned}$$

ועל־כן נקודות החיתוך בקטע $[0,\pi]$ הן $(0,\cos 1)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4},0\right)$ ו־$\left(\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4},0\right)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נגזור:

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= -2\sin\left(2x-1\right) \\ f''\left(x\right) &= -4\cos\left(2x-1\right) \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: הנקודות עבורן $-2\sin(2x-1)=0$, כלומר

$$\begin{aligned}\sin(2x-1) &= 0\\ 2x-1 &= \pi k\\ 2x &= 1+\pi k\\ x &= \frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}k\end{aligned}$$

בקטע $[0,\pi]$ מדובר בנקודות $x=\frac{1}{2}$ ו־$x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$. נקודות חשודות בפיתול: הנקודות עבורן $-4\cos(2x-1)$ ראינו קודם שאלו הן בדיוק הנקודות $x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ ו־$x=\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}$. נרשום בטבלה את הנקודות החשודות בקטע הנ"ל:

x	0	$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{5\pi}{6}$	π
$f'(x)$	$\vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	$\vert$
$f''(x)$	$\vert$	$-$		$-$	inf	$+$		$+$	inf	$-$	$\vert$

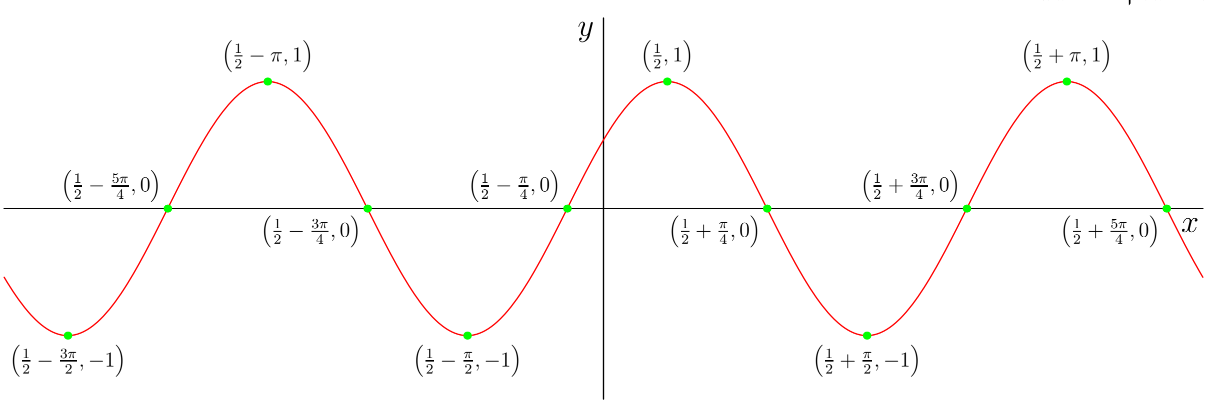
הצבה בפונקציה, והוספת המחזור, תתן את הנקודות הבאות: מקסימום $\left(\frac{1}{2}+\pi k,1\right)$, מינימום $\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi k,-1\right)$, פיתול $\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,0\right)$. תחומי העלייה הם $\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{1}{2}+\pi k\right)$, תחומי הירידה הם $\left(\frac{1}{2}+\pi k,\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, תחומי הקמירות $\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k,\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$ ותחומי הקעירות $\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi k,\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$.

אסימפטוטות נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ - תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(2x-1)}{x}=0\\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\cos(2x-1)=\text{does not exist}\end{aligned}$$

ולכן אין אסימפטוטה ב־∞; בדומה, גם אין ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $[-1,1]$, ובבירור היא אינה חח"ע.

הערה תרגיל זה, בשלמותו, הנו מעבר לרמת המבחן, אך רצוי להבינו בכל זאת.

סעיף ז $\star$

תחום הגדרה $\mathbb{R}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}$. (נזכור כי פונקציית הערך המוחלט היא אלמנטרית!)

זוגיות נבדוק:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1^3-|1|^3=1-1=0 \\
f(-1) &= (-1)^3-|-1|^3=-1-1=-2
\end{aligned}$$

ועל־כן הפונקציה אינה זוגית או אי־זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x^3-|x|^3 &= 0 \\
x^3 &= |x|^3 \\
x &= |x| \\
x &\in [0,\infty)
\end{aligned}$$

ועל־כן הגרף חותך את ציר ה־x באינסוף נקודות: על כל הישר מראשית הצירים ימינה. זה אולי הזמן לעשות היכרות קצת מעמיקה יותר עם הפונקציה: נפריד אותה למקרים. ברור כי הפונקציה מתנהגת אחרת עבור x שלילי ועבור x אי־שלילי. כיצד בדיוק? נראה:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^3 & x\geq 0 \\ x^3-(-x)^3 & x<0 \end{cases}$$

דרך מוצלחת יותר לרשום זאת תהיה

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ 2x^3 & x<0 \end{cases}$$

וזה מסביר את התוצאה שקיבלנו לעיל.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול מהאמור לעיל, הפונקציה היא למעשה סוג של הדבקה מלאכותית של שתי פונקציות ־ אחת על האי־שליליים, אחת על השליליים. נבדוק את המצב בכל אחד מן התחומים בנפרד.

עבור החיוביים מתקיים:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ f''(x) &= 0 \end{aligned}$$

וזאת מאחר והפונקציה קבועה בתחום זה. לכן הפונקציה שם עולה, יורדת, קמורה וקעורה, וכל הנקודות שם מהוות מינימום וגם מקסימום.

עבור השליליים נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 \\ f''(x) &= 12x \end{aligned}$$

שתי הנגזרות הללו אינן מתאפסות עבור x־ים שליליים. למעשה, הנגזרת הראשונה תמיד חיובית עבור x־ים שליליים, ולכן הפונקציה עולה על השליליים. הנגזרת השנייה תמיד שלילית, ולכן הפונקציה קעורה על השליליים.

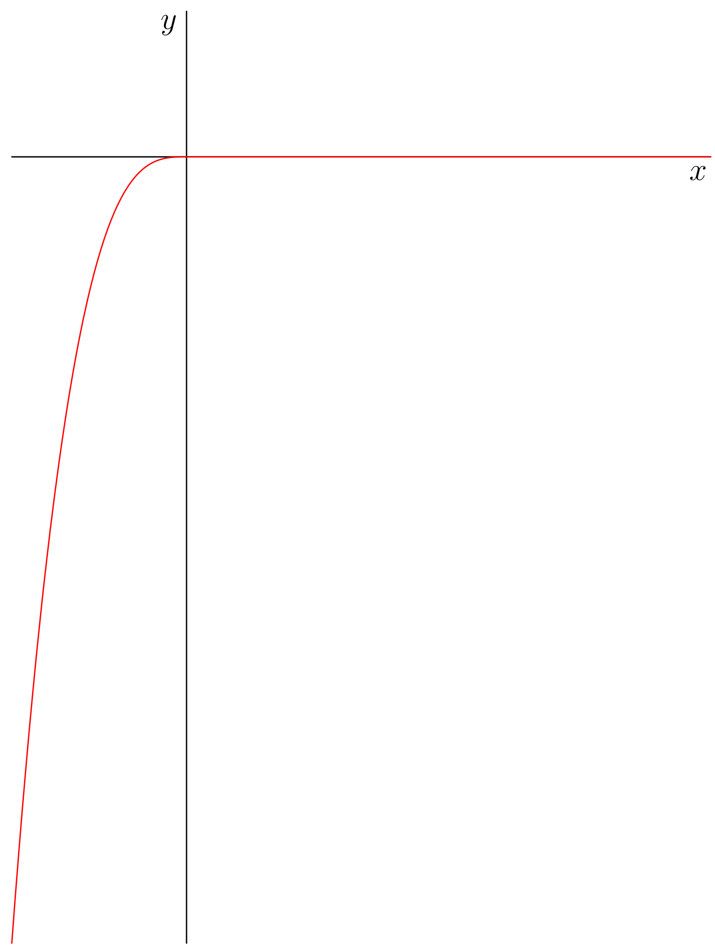
ומה לגבי 0**?** הפונקציה עולה עד 0 וקבועה מ־0, ולכן $(0,0)$ היא נקודת מקסימום.

אסימפטוטות נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. ב־∞, מאחר והפונקציה היא הפונקציה הקבועה 0, האסימפטוטה שם היא פשוט $g(x)=0$. נבדוק ב־$-\infty$ ־ תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-|x|^3}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x} = \infty$$

וזו סתירה ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $(-\infty,0]$, ובבירור היא אינה חח"ע.

סעיף ח ⋆

תחום הגדרה $\mathbb{R}$.

תחום רציפות $\mathbb{R}$.

זוגיות נבדוק:

$$f(-x) = \frac{|-x|-1}{e^{|-x|-1}} = \frac{|x|-1}{e^{|x|-1}} = f(x)$$

ועל־כן הפונקציה זוגית.

נקודות חיתוך עם הצירים נבדוק:

$$f(0) = \frac{0-1}{e^{0-1}} = \frac{-1}{e^{-1}} = -e$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ |x|-1 &= 0 \\ |x| &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

ועל־כן נקודות החיתוך הן $(0,-e)$, $(-1,0)$ ו־$(1,0)$.

תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול נביט רק באי־שליליים - הפונקציה זוגית, ולכן נוכל להסיק לגבי השליליים. באי־שליליים, הפונקציה בעצם נראית כך:

$$f(x) = \frac{x-1}{e^{x-1}}$$

נגזור:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x-1}-(x-1)e^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{(2-x)e^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{2-x}{e^{x-1}} \\ f''(x) &= \frac{-e^{x-1}+(x-2)e^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{(x-3)e^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{x-3}{e^{x-1}} \end{aligned}$$

נקודות חשודות בקיצון: $x=2$. נקודות חשודות בפיתול: $x=3$. נציב בטבלה (ונזכור שאנו בודקים רק את צד ימין של ציר ה־y)

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$f'(x)$	?	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$
$f''(x)$	?	$-$		$-$	inf	$+$

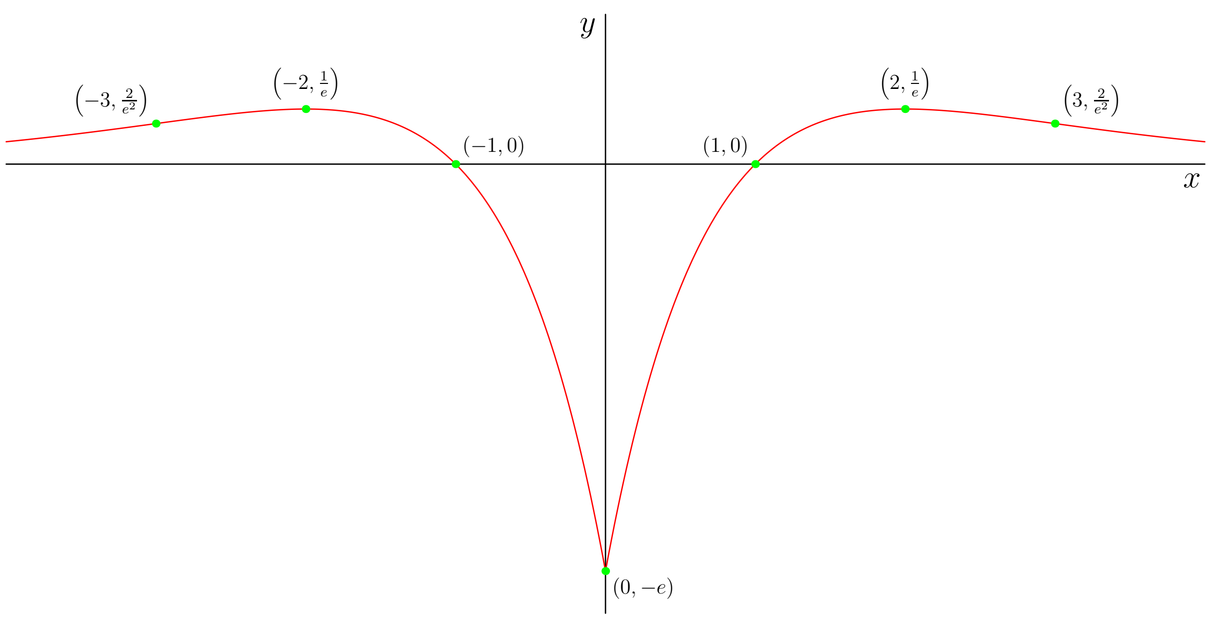
והצבה בפונקציה (ומחשבה על כך שהפונקציה זוגית!) תתן את הנקודות הבאות: מקסימום ב־$\left(2,\frac{1}{e}\right)$ (ולכן גם מקסימום ב־$\left(-2,\frac{1}{e}\right)$) ופיתול ב־$\left(3,\frac{2}{e^2}\right)$ (ולכן גם פיתול ב־$\left(-3,\frac{2}{e^2}\right)$. תחום העלייה בחיוביים הוא $(0,2)$ ותחום הירידה הוא $(2,\infty)$, ולכן $(-2,0)$ הוא תחום ירידה ו־$(-\infty,-2)$ הוא תחום עלייה ־ ולכן 0 היא נקודת מקסימום. תחום הקמירות בחיוביים הוא $(0,3)$ ותחום הקעירות הוא $(3,\infty)$, ולכן בשליליים $(-3,0)$ הוא תחום קמירות ו־$(-\infty,-3)$ הוא תחום קעירות.

אסימפטוטות נבדוק קיומן של אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ב־∞ ־ תהי $g(x)=ax+b$; לפי המשפט,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|-1}{xe^{|x|-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{xe^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=1\cdot 0=0\\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|-1}{e^{|x|-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0\end{aligned}$$

ולכן $g(x)=0$ הנה אסימפטוטה משופעת באינסוף. חישוב דומה (או שיקול של זוגיות) יראה כי היא גם אסימפטוטה משופעת ב־$-\infty$.

שרטוט להלן סכימה:



ניתן לראות כי תמונת f הנה $\left[-e,\frac{1}{e}\right]$, ובבירור היא אינה חח"ע.