

## תרגיל 9 – גבולות (ii)

1. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \sin x} \quad (\text{ד}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin^2 x} \quad (\text{א}) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\cos(2x)} \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin x - \cos x} \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x \quad (\text{ח}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cot(\pi x) \quad (\text{ז}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (\text{ו}) \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin x} \quad (\text{ה})$$

**פתרונות**

**(א) מתקיים:**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x (\tan x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

**(ב) מתקיים:**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\sin x \cos x} = -2$$

**(ג) מתקיים:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\cos x - 1}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x-1)}{x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

(את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$  חישבנו בכיתה)

**(ד) מתקיים:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x}{1 - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - 2\sin^2 x}{1 - \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 4 \end{aligned}$$

**(ה) מתקיים:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 1}{\sin x} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin^2 x}{\sin x} = -2 \lim_{x \rightarrow 2\pi} \sin x = 0 \end{aligned}$$

(ו) מתקיים (נעזרנו פה בכפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ז) מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot(\pi x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \cdot \frac{\cos(\pi x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

(ח) גבול זה אינו קיים (הפונקציה  $\tan x$  הנה מחזורית ולא קבועה).

2. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 - 3x^2 - 1} - x^2 \quad (\text{ד}) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 9} \quad (\text{ג}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 1} \quad (\text{א})$$

**פתרונות**

(א) נוציא גורם משותף בכפייה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x - 1} \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} = 1 \cdot \sqrt{4} = 2$$

(ב) נכפול בצמוד:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x+2-2} \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) = 1 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

(ג) נכפול בצמוד:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{1 + \sqrt{x-2}}{1 + \sqrt{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - (x-2)}{(x-3)(x+3)(1 + \sqrt{x-2})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(1 + \sqrt{x-2})} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(1 + \sqrt{x-2})} = \frac{1}{6 \cdot 2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(ד) נכפול בצמוד:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^4 - 3x^2 - 1} - x^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1} + x^2}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1} + x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 - 1 - x^4}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 1}{x^2 \left( \sqrt{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}} + 1} \\ &= (-3) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x}{4 + 2x^2} \right)^x \quad (\text{ד}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \quad (\text{ג}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{9}{x} \right)^x \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{2x} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin(2x)}} \quad (\text{ה}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+2} \right)^{2x} \quad (\text{ו}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2-1}{2x^2+2} \right)^x \quad (\text{ז}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan(3x))^{1/x} \quad (\text{ח})$$

**פתרונות**

(א) מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x} \right)^{\frac{2x}{3x}} = e^{\frac{2}{3}}$$

(ב) מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{9}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{9}x} \right)^{\frac{1}{9}x} \right)^9 = e^9$$

(ג) מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sin x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e$$

(למעשה, צריך לבדוק פה גבול מימין וגבול משמאל, מאחר ול- $\frac{1}{\sin x}$  אין גבול ב-0; אבל שניהם יוצאים שווים,

וערכם  $e$ )

**(ד) מתקיים:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x}{4 + 2x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{\frac{4+2x^2}{3x}}\right)^{\frac{4+2x^2}{3x}} \right)^{x \cdot \frac{3x}{4+2x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{4+2x^2}\right)} = e^{\frac{3}{2}}$$

**(ה) מתקיים:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan(3x))^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\tan(3x)}}\right)^{\frac{1}{\tan(3x)}} \right)^{\frac{\tan(3x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}}$$

כעת נותר לכם לחשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}$  וקיבלתם את התוצאה!

**(ז), (ח)** המטרה היא להעביר את השבר שבפנים לצורה של 1 ועוד משהו קטן. נעשה זאת בסעיף זה ו', ובסעיף ז' הפתרון דומה. מתקיים:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 2}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2 - 3}{2x^2 + 2}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2x^2 + 2}\right)^x \end{aligned}$$

ומפה הפתרון כרגיל.

**(ח)** פתרו זאת בעזרת סעיף ג' ובעזרת הזהות עבור סינוס של זווית כפולה.

4. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)}$$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ (ג)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ (ב)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ (א)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ (ו)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ (ה)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ (ד)}$$

**פתרונות**

**(א) מתקיים:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

**(ב) מתקיים:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

**(ג)** מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

**(ד)** מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

**(ה)** מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

**(ו)** בדיוק כמו סעיף ה'.