

סמסטר קיץ 2012
מועד ב', 9/9/2011
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 11 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- רצוי לנמק את התשובות. במקומות בהם רשום במפורש לנמק, יש לעשות זאת.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ על-פי הסעיפים הבאים:

(א) מצא/י את תחום ההגדרה

(ב) מצא/י את תחומי הרציפות

(ג) קבע/י האם f זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה

(ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים

(ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי

(ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול

(ז) מצא/י את האסימפטוטות האנכיות והמשופעות

(ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה

(ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f , והאם היא חד-חד-ערכית

שאלה 2 (10 נק')

נגדיר $f(x) = x - 2 \arctan x$. חשבי את האסימפטוטות המשופעות של f ב- ∞ וב- $(-\infty)$, או קבע/י כי אלה אינן קיימות.

שאלה 3 (9 נק')

חשבי את הגבולות הבאים (או קבע/י שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(2 + \sin x) \quad (\text{ג}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x) \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1}(2 + \sin x) \quad (\text{א})$$

שאלה 4 (7 נק')

מצא/י קירוב לינארי לערך $\ln(1.03)$.

שאלה 5 (8 נק')

חשבי כמה פתרונות בדיוק יש למשוואה $e^{3x} = \pi x + 7$ בקטע $[\frac{1}{3}, \ln 3]$. נמקי את תשובתך.

שאלה 6 (8 נק')

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר. נניח כי $f(1) = 1$, $f(3) = \pi$. הוכיחי/הוכח כי קיימת נקודה c בקטע $(1, 3)$ עבורה מתקיים $f'(c) > 1$.

שאלה 7 (15 נק')

גודלה של אוכלוסיה בזמן t נתון על-ידי הנוסחה $N(t) = \frac{a}{1 + 3^{173-t}}$ (עבור מספר ממשי $a > 0$). מצא/י את t עבורו קצב גדילת האוכלוסיה (כלומר $N'(t)$) הנו מירבי.

שאלה 8 (10 נק')

(א) יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות עולות ממש. הוכח/הוכיחי כי $f \circ g(x)$ הנה פונקציה עולה ממש.

(ב) הסבר/הסבירי מדוע פונקציה המוגדרת על כל הישר הממשי אינה יכולה להיות זוגית וגם עולה ממש, ומצא/י דוגמה לפונקציה אי-זוגית שהיא עולה ממש.

שאלה 9 (12 נק')

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על כל הישר הממשי, ונניח כי $f(0) = 1$. נגדיר $h_1(x) = e^{f(x)}$, $h_2(x) = (f(x))^2$. ענה/י על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד:

(א) אם ידוע כי $h_1(x)$ גזירה על כל הישר הממשי וכי $h_1'(0) = 1$ - האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי? אם כן, מצא/י את $f'(0)$. אם לא, תן/י דוגמה מתאימה.

(ב) אם ידוע כי $h_2(x)$ גזירה על כל הישר הממשי וכי $h_2'(0) = 0$ - האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי? אם כן, מצא/י את $f'(0)$. אם לא, תן/י דוגמה מתאימה.

שאלה 10 (12 נק')

תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x) = e^{1/(x^2+1)}$.

(א) מצא/י את שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $F(x)$ בנקודה $x = 1$.

(ב) האם ל- $F(x)$ יש נקודת מקסימום, מקומית או גלובלית? נמק/י את תשובתך!

(ג) הסבר/הסבירי מדוע

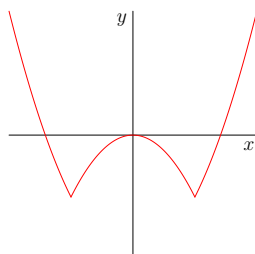
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$$

(ניתן להסתפק בשרטוטים והסברים לא פורמליים).

שאלה נוספת מעבר לדף!

שאלה 11 (4 נק')

הביטי/הבט בגרף הבא, ובחרי/י מהרשימה שלאחריו את הפונקציה היחידה עבודה ייתכן שזהו אכן הגרף שלה. אין צורך לנמק. דאגי/י לרשום את התשובה במחברת הבחינה.



$$f(x) = \sqrt{|1-x|} - 1 \quad (\text{ג}) \quad f(x) = |x^4 - 2| \quad (\text{ב}) \quad f(x) = |1 - |1 - x^8|| \quad (\text{א})$$

$$f(x) = |x^6 + 1| \quad (\text{ו}) \quad f(x) = (\sqrt{x^6})^2 \quad (\text{ה}) \quad f(x) = |1 - x^2| - 1 \quad (\text{ד})$$

$$\text{אף פונקציה מהרשימה לא תתכן} \quad (\text{ט}) \quad f(x) = |x - 3| - 3 \quad (\text{ח}) \quad f(x) = |x^5 - 2| - 2 \quad (\text{ז})$$