

סמסטר קיץ 2013
מועד א', 26/8/2013
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 10 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- רצוי לנמק את התשובות. במקומות בהם רשום במפורש לנמק, יש לעשות זאת.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ על-פי הסעיפים הבאים:

(א) מצא/י את תחום ההגדרה

(ב) מצא/י את תחומי הרציפות

(ג) קבע/י האם f זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה

(ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים

(ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי

(ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול

(ז) מצא/י את האסימפטוטות האנכיות והמשופעות

(ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה

(ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f , האם היא מונוטונית והאם היא חד-חד-ערכית

שאלה 2 (7 נק')

היו $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$ פונקציות, ונניח כי $g_1(x) = x + 1$ הנה אסימפטוטה של $f_1(x)$ ב- ∞ , ונניח גם כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 7$. מצא/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

שאלה 3 (12 נק')

מצא/י את הגבולות הבאים (או קבע/י שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + \pi^x - 2}{\ln(1 - 7x)} \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \pi^x - 2}{\ln(1 - 7x)} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{\sin(2x)} \quad (\text{ד}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{\sin(2x)} \quad (\text{ג})$$

שאלה 4 (6 נק')

מצא/י את הגבול (החד-צדדי) הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (e^{\tan x} - \tan x)$$

שאלה 5 (10 נק')

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ פונקציה הפיכה המקיימת $f(7) = 1$, וגם

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

(כאשר A הנה קבוצה כלשהי).

(א) מצא/י קירוב לינארי ל- $f(7.01)$.

(ב) הוכח/הוכיחי כי f^{-1} הנה פונקציה עולה.

שאלה 6 (10 נק')

הוכיח/הוכיחי כי לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים

$$\tan x > x$$

שאלה 7 (20 נק')

בונים משולש ברביע הראשון כך שקודקוד אחד שלו נמצא בראשית, קודקוד נוסף נמצא בנקודה $(t^2, 0)$ (עבור $t > 0$ כלשהו), והקודקוד השלישי נמצא בנקודה (t, e^{-t^2}) . נסמן ב- $s(t)$ את שטח המשולש שנוצר.

(א) מצא/י את t עבורו שטח המשולש $(s(t))$ הנו מקסימלי, ומצא/י את השטח הנ"ל.

(ב) מצא/י את הגבול

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$$

שאלה 8 (10 נק')

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נסמן $g(x) = \sqrt{g(x)}$ ו- $h(x) = (f(x))^2$.

(א) האם g בהכרח רציפה? האם היא בהכרח גזירה? נמק/י את תשובתך!

(ב) האם h בהכרח רציפה? האם היא בהכרח גזירה? נמק/י את תשובתך!

שאלה 9 (10 נק')

תהי $f: [e, \pi] \rightarrow [e, \pi]$ רציפה. הוכיח/הוכיחי כי קיים c בקטע $[e, \pi]$ עבורו $f(c) = c$. במילים אחרות, הוכיח/הוכיחי כי ל- f קיימת נקודת שבת בקטע $[e, \pi]$.

שאלה 10 (10 נק')

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי, ונניח כי קיים c ממשי יחיד עבורו $f(c) = 0$. תהי $F(x)$ פונקציה קדומה ל- f .

(א) האם $F(x)$ בהכרח גזירה? האם היא בהכרח גזירה פעמיים? נמק/י את תשובתך!

(ב) האם בהכרח קיים מספר ממשי d עבורו $F(d) = 0$? אם קיים כזה, האם הוא בהכרח יחיד? הוכח/הוכיחי או מצא/י דוגמה נגדית מתאימה.