

סמסטר קיץ 2014

מועד ב', 9.9.2014

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 3 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 11 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- רצוי לנמק את התשובות. במקומות בהם רשום במפורש לנמק, יש לעשות זאת.
- שימו לב כי בבחינה זו 4 עמודים, כולל עמוד זה.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f(x) = \ln(e^x + 2014)$ על-פי הסעיפים הבאים:

- (א) מצא/י את תחום ההגדרה
- (ב) מצא/י את תחומי הרציפות
- (ג) קבע/י האם f זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה
- (ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים
- (ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי
- (ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול
- (ז) מצא/י את האסימפטוטת האנכית והמשופעות
- (ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה
- (ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f , והאם היא חד-חד-ערכית

שאלה 2 (12 נק')

נגדיר $f(x) = e \sin(\pi x + 1)$.

- (א) האם f מחזורית? אם כן, מצא/י מחזור. אם לא, הסביר/י/הסבר מדוע.
- (ב) מהי התמונה של f ?
- (ג) כמה נקודות מקסימום יש ל- f ?
- (ד) מהו הערך המקסימלי של הנגזרת f' ?

שאלה 3 (12 נק')

מצא/י את הגבולות הבאים (או קבע/י שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{ב}) \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{ד}) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{ג})$$

שאלה 4 (5 נק')

מצא/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + 2^x) - \ln(2 + x^3))$$

שאלה 5 (15 נק')

נגדיר $f : (1, \infty) \rightarrow (-\frac{1}{4}, \infty)$ באופן הבא: $f(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (2 \ln x - 1)$.

(א) הוכיחי/הוכח כי f חד־חד־ערכית (רמז: מה ניתן לומר על הנגזרת של f ?).

(ב) מצאי את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

(ג) הוכיחי/הוכח כי f הפיכה.

(ד) מצאי את $f^{-1}(0)$.

(ה) מצאי את $(f^{-1})'(0)$.

שאלה 6 (6 נק')

הסבר/הסבירי מדוע למשוואה $\tan x = x$ יש ∞ פתרונות.

שאלה 7 (6 נק')

הסבירי/הסבר מדוע לכל x בקטע $[-1, 1]$ מתקיים

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

שאלה 8 (15 נק')

במקשת אבטיחים במושב פארן נמצאים כרגע אבטיחים במשקל כולל של 100 ק"ג. בכל יום, המשקל הכולל של האבטיחים גדל ב-2 ק"ג, אך מחירו של ק"ג אבטיח קטן ב-2 אג'. מחירו הנוכחי של ק"ג אבטיחים הנו 3 שקלים חדשים. כמה זמן צריך החקלאי לחכות עד לקטיף האבטיחים, כך שהעלות הכוללת של כלל האבטיחים שיקטוף תהיה מקסימלית? מה תהיה העלות הכוללת במקרה זה?

שאלה 9 (10 נק')

(א) מצאי דוגמה לפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שהנה רציפה ועולה־ממש, אך שאינה חותכת את ציר ה- x .

(ב) מצאי דוגמה לפונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שהנה עולה־ממש, שמקיימת $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, אך שאינה חותכת את ציר ה- x .

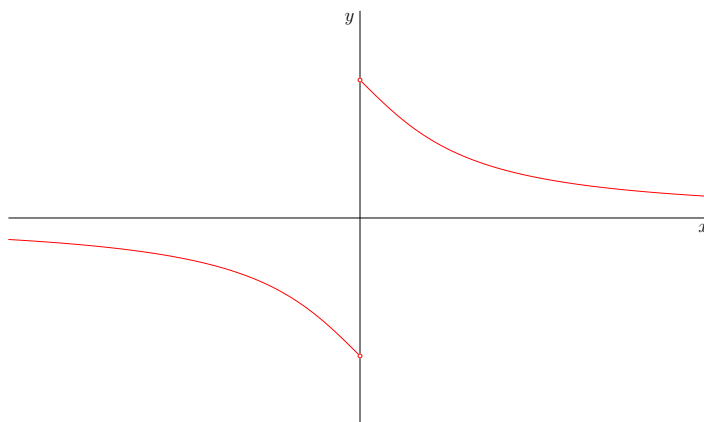
(ג) תהי $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה שמקיימת $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ וגם $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$. הסבירי/הסבר מדוע חותכת את ציר ה- x בהכרח.

שאלה 10 (8 נק')

- (א) מצא/י דוגמה לפונקציה שאינה זוגית, אך שנגזרתה הנה פונקציה זוגית.
 (ב) מצא/י דוגמה לפונקציה שאינה זוגית, אך שכל הפונקציות הקדומות שלה הנן זוגיות.

שאלה 11 (6 נק')

הבט/הביטי בגרף הבא, ובחר/י מהרשימה שלאחריו את הפונקציה היחידה עבורה ייתכן שזהו אכן הגרף שלה. אין צורך לנמק. דאגי/י לרשום את התשובה במחברת הבחינה.
שימו/י לב: הפונקציה אינה מוגדרת ב-0!



- $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (ג) $f(x) = \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$ (ב) $f(x) = \arctan(\ln|x|)$ (א)
 $f(x) = \arctan(\ln x)$ (ו) $f(x) = \frac{1}{x}$ (ה) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (ד)
 $f(x) = \ln(\arctan x)$ (ח) $f(x) = \arctan x$ (ז) אף פונקציה מהרשימה לא תתכן (ט)