1. מצאו את <u>כל</u> הנקודות בהן $f(x) = |\cos x|$ אינה גזירה.

- אלו הן כל הנקודות שבהן הערך המוחלט מתאפס (ניתן לראות זאת בשרטוט). כלומר, כל הנקודות שבהן $\cos x = 0$, וראינו שאלו הן הנקודות $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

2. מצאו את <u>כל</u> הנקודות בהן $f(x) = |\cos x + 1|$ אינה גזירה.

- אין נקודות כאלה. הפונקציה $\cos x + 1$ הנה אי-שלילית, והערך המוחלט אינו משנה אותה.

3. מצאו את <u>כל</u> הנקודות בהן $f(x) = |\cos x - 1|$ אינה גזירה.

- אין נקודות כאלה. הפונקציה $\cos x - 1$ הנה אי-חיובית, והערך המוחלט פשוט משקף את כל הגרף שלה מבעד לציר ה-x.

4. מצאו את <u>כל</u> הנקודות על גרף הפונקציה $f(x) = \arctan x$ שבהן המשיק לגרף מקביל לציר ה-x (אם יש כאלה).

- אלו הן בדיוק הנקודות שבהן הנגזרת של $f(x)$ מתאפסת. אבל

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

כלומר, אין נקודות כאלה.

5. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה הפיכה, ונניח כי $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$. האם $f^{-1}(x)$ בהכרח גזירה ב-2? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, חשבו את הנגזרת של f^{-1} בנקודה 2.

- $f^{-1}(x)$ בהכרח גזירה ב-2, לפי המשפט של נגזרת של פונקציה הפוכה, ומאחר ו-$f(1) = 2$. לפי המשפט מתקיים גם כי

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \left(f^{-1}\right)'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

6. נגדיר $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$.

(א) הוכיחו כי f חד-חד-ערכית (**רמז:** מה ניתן לומר על הנגזרת של f?).

- נגזור:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+4\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{x^4+12x^2}{\left(x^2+4\right)^2}>0$$

ולכן (לפי המסקנה מלגראנז') הפונקציה f הנה עולה-ממש, ולכן חד-חד-ערכית.

(ב) מצאו את הגבולות של $f(x)$ ב-$\pm\infty$.

- לפי כלל האצבע מתקיים

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+4} &= -\infty\\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+4} &= \infty\end{aligned}$$

(ג) הוכיחו כי f הפיכה.

- מהסעיף הקודם נובע כי תמונתה הנה $\mathbb{R}$, כלומר היא על. מאחר והיא גם חח"ע, נובע שהיא הפיכה.

(ד) נחשו את $f^{-1}(1)$ (**רמז:** זהו מספר שלם).

- ניחוש: $f(2)=2^3/\left(2^2+4\right)=1$. כלומר, $f^{-1}(1)=2$.

(ה) מצאו את $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

- לפי המשפט לנגזרת של פונקציה הפוכה,

$$\left(f^{-1}\right)'(1)=\left(f^{-1}\right)'(f(2))=\frac{1}{f'(2)}=\frac{\left(2^2+4\right)^2}{2^4+12\cdot 2^2}=\frac{64}{16+48}=1$$

7. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים על כל הישר הממשי, ונניח כי $f(0)=0$ וכי $f'(0)=\pi$ ו-$f''(0)=17$. נגדיר $g(x)=e^{f(x)}$.

(א) חשבו את $g(0)$.

- מתקיים

$$g(0)=e^{f(0)}=e^{0}=1$$

(ב) חשבו את $g'(0)$.

- לפי כלל השרשרת,

$$g'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

ולכן

$$g'(0)=e^{f(0)}\cdot f'(0)=e^{0}\cdot\pi=\pi$$

(ג) חשבו את $g''(0)$.

- לפי כלל השרשרת וכלל המכפלה,

$$\begin{aligned} g''(x)=(g'(x))' &= \left(e^{f(x)}\cdot f'(x)\right)' \\ &= \left(e^{f(x)}\right)'\cdot f'(x)+e^{f(x)}\cdot f''(x) \\ &= e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot f'(x)+e^{f(x)}\cdot f''(x) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} g''(0) &= e^{f(0)}\cdot f'(0)\cdot f'(0)+e^{f(0)}\cdot f''(0) \\ &= e^{0}\cdot\pi\cdot\pi+e^{0}\cdot 17=\pi^{2}+17 \end{aligned}$$

8. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה על כל הישר, ונניח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=1$. הסבירו מדוע $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

- לא פורמלי: מהנתון ניתן להסיק שהשיפוע של הפונקציה הולך ומתקרב ל-1. לכן, על כל צעד ימינה שנלך, הגובה של הפונקציה יגדל כמעט ב-1. לכן, אם נלך ∞ צעדים ימינה, הגובה יגדל ב-∞. אין לנו כלים פורמליים להוכיח זאת.

9. תהי g פונקציה גזירה על כל הישר, ונניח כי g' רציפה ב-0. תהי $h(x) = xg(x)$. הראו כי h גזירה פעמיים ב-0. כלומר, הראו כי h גזירה ב-0, וגם h' גזירה ב-0.

- ראשית, מאחר ו-g גזירה על כל הישר, היא גם רציפה על כל הישר. כמו כן, לפי הנתון נובע כי $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$. נחשב את הנגזרת של h לפי כלל המכפלה:

$$h'(x) = (xg(x))' = 1 \cdot g(x) + xg'(x)$$

ולכן h גזירה על כל הישר הממשי, ובפרט ב-0. נגזרתה שם:

$$h'(0) = g(0) + 0g'(0) = g(0)$$

נראה עתה ש-h' גזירה ב-0. **אנחנו לא יכולים להשתמש בכלל המכפלה, שכן לא ידוע ש-g' גזירה!** אבל אנחנו כן יכולים להשתמש בהגדרת הנגזרת. נקבל:

$$\begin{aligned} h''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(g(x) + xg'(x)) - g(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} + \frac{xg'(x)}{x} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} + g'(x) \right) \\ &= g'(0) + g'(0) = 2g'(0) \end{aligned}$$

ולכן h' גזירה ב-0.

10. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נסמן $g(x) = (f(x))^2$, ו-$h(x) = \sqrt{g(x)}$.

(א) האם g בהכרח רציפה? האם היא בהכרח גזירה?

- g גזירה; אנחנו ממש יודעים את הנגזרת שלה:

$$g'(x) = \left((f(x))^2 \right)' = 2f(x)f'(x)$$

ולכן g גם רציפה.

(ב) האם h בהכרח רציפה? האם היא בהכרח גזירה?

- h אינה בהכרח גזירה. לדוגמה, ייתכן כי $f(x) = x$, ואז $g(x) = x^2$ ו-$h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, ואנחנו יודעים ש-$|x|$ אינה גזירה (ב-0). מצד שני, היא בהכרח רציפה, שכן

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{g(a)} = h(a)$$

11. תהי $f(x)$ פונקציה זוגית וגזירה על כל הישר הממשי. נסמן $g(x)=f'(x)$. האם $g(x)$ בהכרח זוגית? האם היא בהכרח אי-זוגית?

- $g(x)$ הנה בהכרח אי-זוגית. נוכיח זאת:

$$\begin{aligned} g(x)=f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ g(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{-h} = -f'(x) = -g(x) \end{aligned}$$