תרגיל 10 – רציפות – הערות

1. האם הפונקציה $f(x)=\frac{3x^2-47}{2x-8}$ רציפה בנקודה 4? לא, היא אינה מוגדרת שם.

2. האם הפונקציה $f(x)=\frac{3x^2-48}{2x-8}$ רציפה בנקודה 4? לא, היא אינה מוגדרת שם.

3. מצאו דוגמה לפונקציה רציונלית שאינה רציפה בנקודה אחת בלבד.

   למשל, $f(x)=\frac{1}{x}$ – הנקודה היחידה שהיא אינה רציפה בה היא 0.

4. מצאו דוגמה לפונקציה רציונלית שאינה רציפה בשתי נקודות שונות.

   למשל, $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ – היא אינה רציפה ב־0 וב־1.

5. מצאו דוגמה לפונקציה אלמנטרית שאינה פונקציה רציונלית, שאינה רציפה בנקודה אחת בלבד.

   למשל, $f(x)=\frac{x}{|x|}$ – היא אלמנטרית, אינה רציונלית, והנקודה 0 היא נקודת האי־רציפות היחידה שלה.

6. תהי f פונקציה, ונתון: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. תהי g פונקציה רציפה ב־b. נסו להסביר (במילים) מדוע מתקיים

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g(b)$$

   נסו לחשוב: האם זה תלוי ברציפות של f?

הסבר נביט באגף שמאל. צריך לראות מה קורה ל־g בנקודה $f(x)$, כאשר x מתקרב ל־a. אבל, כאשר x מתקרב ל־a, $f(x)$ מתקרבת ל־b (זה נתון), כלומר, צריך לראות מה קורה ל־g בנקודה שמתקרבת ל־b. במילים אחרות, באגף שמאל רשום

$$\lim_{y\to b} g(y)$$

ומרציפות g, אנו יודעים כי ביטוי זה שווה לגובה של g ב־b, כלומר ל־$g(b)$, וזה אכן מה שרשום באגף ימין.

7. $\star$ הוכיחו כי לכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש לפחות שורש אחד.

   הוכחה יהי $f(x)$ פולינום ממעלה אי־זוגית n. נסמן:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

   כאשר $a_n\neq 0$. מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)=\begin{cases}\infty & a_n>0\\ -\infty & a_n<0\end{cases}$$

   בדומה:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)=\begin{cases}-\infty & a_n>0\\ \infty & a_n<0\end{cases}$$

   ומשיקול דומה לזה שהוצג בכיתה עבור פולינום ממעלה 3, נסיק כי ל־f יש בהכרח שורש.

8. מצאו דוגמה לפולינום ממעלה 2 שאין לו שורש. למשל, $f(x)=x^2+1$.

9. מצאו דוגמה לפולינום ממעלה 4 שאין לו שורש. למשל, $f(x)=x^4+1$.

10. כמה פתרונות (**בדיוק**) יש למשוואה $\log_3 x=\frac{1}{4}$ בקטע $[1,3]$?

פתרון אנחנו יודעים שיש **לפחות** פתרון אחד לפי משפט ערך הביניים; זאת כי אם נסמן $f(x)=\log_3 x$, נקבל כי

$$\begin{aligned} f(1) &= \log_3 1 = 0 \\ f(3) &= \log_3 3 = 1 \end{aligned}$$

ולכן הפונקציה חייבת לעבור דרך הערך $\frac{1}{4}$. אבל למעשה, יש **בדיוק** פתרון אחד. מדוע? מכיוון ש־f היא פונקציה עולה־ממש. פונקציה עולה־ממש חותכת כל "קו גובה" פעם אחת בלבד!

11. כמה פתרונות (**בדיוק**) יש למשוואה $x^3=1273.93$ בקרן $[3,\infty)$?

פתרון שוב נסמן $f(x)=x^3$. מתקיים: $f(3)=3^3=27$, ו־$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, ולכן הפונקציה חוצה כל קו גובה בין 27 ל־∞ בקרן הנתונה, ובפרט היא חוצה את 1273.93. לכן יש למשוואה **לפחות** פתרון אחד בקרן. אבל למעשה, יש **בדיוק** פתרון אחד. מדוע? ראו נימוק בסעיף הקודם!

12. הראו כי למשוואה $3^x+7=16x$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,1]$.

הוכחה נעזר במשפט ערך הביניים. נגדיר $f(x)=3^x+7-16x$. מתקיים:

$$\begin{aligned} f(0) &= 3^0+7=8>0 \\ f(1) &= 3^1+7-16<0 \end{aligned}$$

ולכן קיים $c\in(0,1)$ עבורו $f(c)=0$, והוא פתרון למשוואה.

13. האם קיים פתרון למשוואה $x^7-3x=1$?

הפונקציה $f(x)=x^7-3x-1$ היא פולינום ממעלה 7, וכפי שהוכחנו בסעיף 7, יש לו שורש. השורש של הפולינום הנ"ל הוא בדיוק הפתרון למשוואה הנתונה (למה?).

14. מצאו דוגמה לפונקציה זוגית ורציפה על הקטע $(-1,1)$ שאין לה מקסימום מוחלט. $f(x)=x^2$

15. מצאו דוגמה לפונקציה אי־זוגית ורציפה על הקטע $(-1,1)$ שאין לה מקסימום מוחלט וגם לא מינימום מוחלט. $f(x)=x^3$

16. מצאו דוגמה לפונקציה המוגדרת על כל הישר, שערכה ב־-1 הוא -1, ערכה ב־1 הוא 1, אך שאין אף נקודה שבה ערכה הוא 0.

דוגמה נגדיר

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\geq0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

17. יהיו $f\left(x\right),g\left(x\right)$ שתי פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי, $g\left(x\right)$ רציפה על כל הישר הממשי. נגדיר $h_1\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$, $h_2\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$. ענו על כל אחד מבין הסעיפים הבאים בנפרד:

(א) אם ידוע כי $h_1\left(x\right)$ רציפה על כל הישר הממשי – האם נובע כי $f\left(x\right)$ רציפה על כל הישר הממשי?

פתרון מתקיים

$$f\left(x\right)=h_1\left(x\right)-g\left(x\right)$$

ולכן f רציפה כהפרש של שתי רציפות.

(ב) אם ידוע כי $h_2\left(x\right)$ רציפה על כל הישר הממשי – האם נובע כי $f\left(x\right)$ רציפה על כל הישר הממשי?

פתרון לא. למשל, נבחר את $f\left(x\right)$ להיות הפונקציה שהוגדרה בסעיף 16 של תרגיל זה. f אינה רציפה, כמובן. נבחר את g להיות הפונקציה הקבועה 0. נקבל:

$$h_2\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)=0$$

כלומר, h_2 גם היא הפונקציה הקבועה 0, ולכן היא רציפה. דוגמה זו מפריכה את הטענה.

18. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. הוכיחו כי קיימת $c\in[0,1]$ עבורה $f\left(c\right)=c^2$.

רמז הביטו בהוכחה של "משפט נקודת השבת".

הוכחה נגדיר פונקציית עזר:

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^2$$

נשים לב כי g רציפה כהפרש של רציפות. כמו כן,

$$\begin{aligned}g\left(0\right)&=f\left(0\right)-0\geq0\\ g\left(1\right)&=f\left(1\right)-1\leq0\end{aligned}$$

וממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in\left(0,1\right)$ עבורה $g\left(c\right)=0$, כלומר

$$\begin{aligned}f\left(c\right)-c^2&=0\\ f\left(c\right)&=c^2\end{aligned}$$

כדרוש.