תרגיל 18 – אינטגרלים – הערות

1. מהי הפונקציה הקדומה של $\sin(2x)$? האם יש רק אחת כזו?

תשובה אין רק אחת כזו, אלא משפחה שלמה. הפונקציות הקדומות הן

$$-\frac{1}{2}\cos(2x)+c$$

2. מצאו את כל הפונקציות הקדומות של $f(x)=x+1$.

תשובה להלן:

$$\frac{x^2}{2}+x+c$$

3. חשבו את האינטגרלים הלא־מסוימים הבאים:

(א) $\int e^{3x}dx$ **(ב)** $\int \frac{dx}{4x}$ **(ג)** $\int \left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)dx$

(ד) $\int \frac{dx}{3x^2}$ **(ה)** $\int xe^{x^2}dx$ **(ו)** $\int \frac{2-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

(ז) $\int \frac{(x+1)^3}{x^4}dx$ **(ח)** $\int \frac{4-3x}{5x-2}dx$ **(ט)** $\int \frac{2}{7+x^2}dx$

(א) זוהי **אינטגרציה של ביטוי עם פרמטר לינארי**. הניחוש מתבסס על התשובה הלא מדויקת e^{3x}, עם תיקון מתאים. מתקיים:

$$\int e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{3}+c$$

(ב) מתקיים:

$$\int \frac{dx}{4x}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+c$$

(ג) עושים אינטגרציה לכל גורם בנפרד ומחברים.

(ד) לפי נוסחה שפיתחנו:

$$\int \frac{dx}{3x^2}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+c=-\frac{1}{3x}+c$$

(ה) מתקיים:

$$\int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 2\arctan x + c$$

(ו) כאן צריך להיות מעט יותר מתוחכמים. נאלץ את התרגיל להיראות כמו תרגיל שאנו יודעים לפתור, ע"י זה שנדאג לכך שבמכנה יופיע ביטוי מהצורה "1 ועוד משהו בריבוע":

$$\int \frac{2}{2+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{2}} = \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

4. מצאו את הפונקציה הקדומה של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, אם ידוע שערכה בנקודה $x = 2$ הוא 3.

פתרון מתקיים

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2}dx = \int dx + \int x^{-2}dx = x - \frac{1}{x} + c$$

מהנתון

$$\begin{aligned} F(2) = 2 - \frac{1}{2} + c &= 3 \\ c &= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

כלומר $F(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$.

5. מצאו את הפונקציה הקדומה של הפונקציה $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2}$, אם ידוע שערכה בנקודה $x = 1$ הוא 0.

6. מצאו את הפונקציה הקדומה של הפונקציה $f(x) = e^{3x-7}$, אם ידוע שערכה בנקודה $x = \frac{7}{3}$ הוא 1.

פתרון מתקיים

$$F(x) = \int e^{3x-7}dx = \frac{e^{3x-7}}{3} + c$$

מהנתון

$$\begin{aligned} F\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{e^{7-7}}{3} + c &= 1 \\ c &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

כלומר $F(x) = \frac{1}{3}\left(e^{3x-7} + 2\right)$.

7. מצאו את השטח הכלוא ברביע הראשון בין גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$, ציר ה־x והישר $x = 4$.

פתרון מדובר בשטח תחת f בין 0 ל־4. כלומר:

$$S=\int_0^4\left(x^2+1\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}+x\right|_0^4=\frac{64}{3}+4$$

8. מצאו את השטח החסום מעל לציר ה־x ומתחת לגרף של $f\left(x\right)=\frac{1}{3x-8}$, בין הישרים האנכים $x=3$ ו־$x=4$.

9. מצאו את השטח החסום מתחת לציר ה־x ומעל לפרבולה של $f\left(x\right)=x^2-3x-10$.

פתרון נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה־x הן 5 ו־-2. נשים לב שאנו נשאלים על השטח תחת ציר ה־x. לכן:

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^5\left(x^2-3x-10\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-10x\right]_{-2}^5 \\ &= -\left(\frac{125}{3}-\frac{75}{2}-50\right)+\left(-\frac{8}{3}-6+20\right)=\ldots \end{aligned}$$

10. חשבו את השטח החסום ברביע הראשון בין הפונקציות $f\left(x\right)=\frac{16}{x}$, $g\left(x\right)=x^3$ והישר $x=7$.

פתרון ראשית נברר מתי הפונקציות נפגשות זו עם זו ברביע הראשון:

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= g\left(x\right) \\ \frac{16}{x} &= x^3 \\ 16 &= x^4 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

מובן כי עד ל־$x=2$, הפונקציה התחתונה היא x^3; משם ואילך, הפונקציה התחתונה היא $\frac{16}{x}$. על־כן,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 x^3dx+\int_2^7\frac{16}{x}dx \\ &= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2+16\ln|x||_2^7 \\ &= 4+16\ln 7-16\ln 2 \end{aligned}$$

11. מצאו את השטח הכלוא בין $f\left(x\right)=x^3$ לבין $g\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$.

פתרון ראשית נברר מתי הפונקציות נפגשות זו עם זו:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \sqrt[3]{x} &= x^3 \\ x &= x^9 \\ 1 &= x^8 \text{ (or } x=0) \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

בין -1 ל־0 הפונקציה העליונה היא x^3 ובין 0 ל־1 הפונקציה העליונה היא $\sqrt[3]{x}$. לכן:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^3\right)dx \\ &= \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^{4/3}}{4/3}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

12. חשבו את השטח הכלוא בין הישרים האנכיים $x=-1$, $x=5$ והפונקציות $f(x)=e^x$ ו־$g(x)=x+1$.

פתרון יש להוכיח (רול/לגראנז' – עשינו זאת בכיתה) כי $e^x \geq x+1$ לכל x. מכאן נובע כי

$$S = \int_{-1}^{5}\left(e^x - (x+1)\right)dx$$

13. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$, הישר האנכי $x=-8$ וציר ה־x.

14. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$, הישרים האנכיים $x=-8$ ו־$x=27$ וציר ה־x.

פתרון מתקיים:

$$S = -\int_{-8}^{0}\sqrt[3]{x}dx + \int_{0}^{27}\sqrt[3]{x}dx$$

15. נגדיר $f(x)=e^{x^2}-ex^2$. תהי $F(x)$ הפונקציה הקדומה של f המקיימת $F(0)=0$. מצאו את תחומי הקמירות והקעירות של $F(x)$ ואת נקודות הפיתול שלה.

פתרון כדי למצוא נקודות חשודות בפיתול (של F), נגזור אותה פעמיים:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) = e^{x^2} - ex^2 \\ F''(x) &= f'(x) = e^{x^2}\cdot 2x - e\cdot 2x \end{aligned}$$

ונשווה ל־0:

$$\begin{aligned} F''(x) &= 0 \\ e^{x^2} \cdot 2x - e \cdot 2x &= 0 \\ 2x\left(e^{x^2} - e\right) &= 0 \end{aligned}$$

ולכן $x = 0$ או $x = \pm 1$. נכין טבלה ונציב נקודות:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$F''(x)$	$-$	inf	$+$	inf	$-$	inf	$+$

ולכן תחומי הקמירות שלה הנם $(-1,0)$ ו־$(1,\infty)$, ותחומי הקעירות שלה הנם $(-\infty,-1)$ ו־$(0,1)$.

16. נגדיר $f(x) = \arctan(e^x)$. תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של f. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $F(x)$ ואת תחומי הקמירות והקעירות שלה.

פתרון בדומה לתרגיל הקודם, נגזור פעם ופעמיים, ונמצא נקודות חשודות בקיצון ובפיתול. מתקיים:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) = \arctan(e^x) \\ F''(x) &= f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \end{aligned}$$

כאשר הנגזרת הראשונה לעולם אינה מתאפסת (כי e^x תמיד חיובי) וכך גם הנגזרת השנייה. על כן F תמיד עולה ותמיד קמורה.