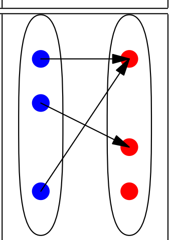
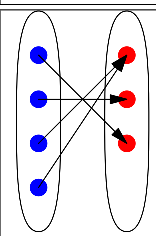
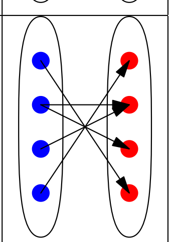
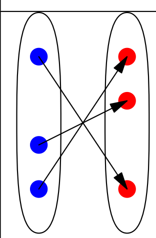
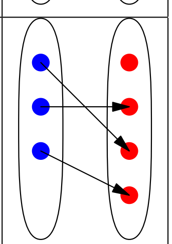
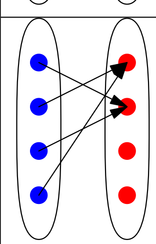
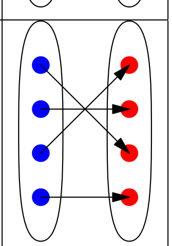
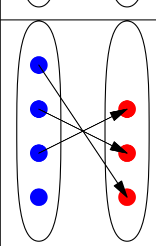
תרגיל 5 – פונקציות – הערות

1. לכל אחד מן התאורים הבאים, ביחרו את האופציה המתאימה:

(א) זוהי אינה פונקציה **(ב)** זוהי פונקציה חח"ע שאינה על **(ג)** זוהי פונקציה על שאינה חח"ע

(ד) זוהי פונקציה שאינה חח"ע ואינה על **(ה)** זוהי פונקציה הפיכה

תיאור	אופציה	תיאור	אופציה
	לא חח"ע ולא על		על ולא חח"ע
	לא פונקציה		הפיכה
	חח"ע ולא על		לא חח"ע ולא על
	הפיכה		לא פונקציה

2. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

(א) $\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ **(ב)** x^2-3 **(ג)** $\sqrt{\frac{x+3}{|x^2-4|}}$ **(ד)** $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

פתרונות חלקיים

(א) אנחנו רוצים שמה שבתוך השורש במכנה יהיה גדול מ־0. כלומר, אנחנו רוצים שיתקיים

$$|x|-x>0$$

מתי זה קורה? אם x חיובי או 0, זה בפירוש לא קורה. אם x שלילי, זה קורה. לכן, אנחנו רוצים שיתקיים $x<0$ (וזה הפתרון).

(ב) $\mathbb{R}$.

(ד) עלינו למצוא את תחום ההגדרה של כל שורש בנפרד (בשיטה הרגילה), ולעשות "וגם" בין שני הפתרונות שאנחנו מוצאים.

3. עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו אם היא חח"ע ואם היא מונוטונית (עולה, עולה חזק, יורדת או יורדת חזק):

(א) x^2+1 **(ב)** $1-x^3$ **(ג)** x^2+2x+2 **(ד)** $(x-4)^2+3$

פתרונות

(א),(ג),(ד) אלו הן פרבולות, ולכן הן אינן חד־חד־ערכיות ואינן מונוטוניות.

(ב) נראה שהיא יורדת ממש ולכן מונוטונית: יהיו $x_1<x_2$. נרצה להראות כי $f(x_1)>f(x_2)$. אכן:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ x_1^3 &< x_2^3 \\ -x_1^3 &> -x_2^3 \\ 1-x_1^3 &> 1-x_2^3 \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

כדרוש.

4. עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו מהי התמונה שלה, האם היא חסומה והאם היא על:

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2$ **(ב)** $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $f(x)=(x+1)^2$ **(ג)** $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x^2}$

(ד) $f:\left[-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x+1}$ **(ה)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{|x|}$ **(ו)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-|x|$

פתרונות

(א) $\mathrm{Im}f = [0,\infty)$ ולכן היא אינה חסומה ואינה על.

(ב) $\mathrm{Im}f = [0,\infty)$ ולכן היא אינה חסומה אך כן על.

(ג) הפונקציה הזו אינה אלא x (בתחום המתאים), ותמונתה $[0,\infty)$. לכן היא אינה חסומה אך כן על.

(ד) נמצא זאת לפי השיטה השנייה שלמדנו: נרשום את התחום כאי־שוויון ונבנה את הפונקציה באגף האמצעי בזהירות:

$$\begin{array}{rlll} -\frac{1}{2} & \leq x < & \infty & /\cdot 2 \\ -1 & \leq 2x < & \infty & /+1 \\ 0 & \leq 2x+1 < & \infty & /\sqrt{()} \\ 0 & \leq \sqrt{2x+1} < & \infty & \end{array}$$

ולכן $\mathrm{Im}f = [0,\infty)$. לכן היא אינה חסומה ואינה על.

(ה) ראינו את הפונקציה הזו בשיעור; תמונתה $\{-1,1\}$. לכן היא חסומה ואינה על.

(ו) תרגיל זה הנו קשה מהאחרים. נרשום $y = x - |x|$ וננסה לבודד את x. כדי להצליח לבודד אותו, עלינו להפריד ל־2 מקרים: x אי־שלילי, או x שלילי. אם x אי־שלילי אז $|x| = x$, ואז $y = 0$, ומכאן נסיק ש־$0 \in \mathrm{Im}f$. אם x שלילי אז $|x| = -x$ ואז $y = 2x$, ולכן $x = \frac{y}{2}$. הצלחנו לבודד את x, אבל תחת ההנחה ש־x שלילי, ולכן גם y שלילי, ולכן כל מספר שלילי נמצא בתמונה. מכאן: $\mathrm{Im}f = (-\infty, 0]$. לכן היא אינה חסומה ואינה על.

5. מצאו את תחום ההגדרה ואת התמונה של הפונקציה $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2-1}$.

פתרון תחום ההגדרה הנו כל ה־x־ים המקיימים $x^2 - 1 \neq 0$, כלומר $x \neq \pm 1$. כדי למצוא את התמונה, ניעזר בשיטה הראשונה שלמדנו:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x+1)(x-1)}{x^2-1} \\ y &= \frac{x^2-1}{x^2-1} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

ולכן התמונה הנה $\{1\}$. הפונקציה הזו הנה, למעשה, "פונקציה רמאית", שכן היא פשוט הקו הישר $y = 1$, למעט שני חורים (ב־1 וב־-1).

6. האם קיימת פונקציה שאינה זוגית ואינה אי־זוגית? אם כן, הדגימו זאת!

כן. למעשה "רוב" הפונקציות הן כאלה. למדנו על אחת כזו: הפונקציה המעריכית.

7. האם קיימת פונקציה שהיא זוגית וגם אי־זוגית? אם כן, הדגימו זאת!

כן. למשל הפונקציה $f(x) \equiv 0$ (הפונקציה הקבועה 0). האם יש עוד כאלה?

8. עבור כל אחת מבין הפונקציות הבאות, החליטו האם היא זוגית או לא, והאם היא אי־זוגית או לא:

(א) x^2+1 **(ב)** $1-x^3$ **(ג)** $1+x+x^2+x^3+x^4$

(ד) $1+x^2+x^4+x^6+x^8$ **(ה)** $1+|x|+\left|x^2\right|+\left|x^3\right|+\left|x^4\right|$ **(ו)** $x+x^3+x^5+x^7+x^9$

דרך הפתרון זהה בכל המקרים. נפתור לדוגמה את סעיף ב': נבדוק האם הפונקציה זוגית או אי־זוגית -

$$f(-x)=1-(-x)^3=1+x^3$$

על־פניו לא נראה שהיא זוגית או אי־זוגית, מכיוון שלא נראה ש־$f(x)=f(-x)$ או $f(-x)=-f(x)$. נציב מספרים, אם כך, בשביל לסתור את זה שהיא זוגית ואת זה שהיא אי־זוגית. נבחר במספרים קלים. למשל,

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1-(-1)^3=1+1=2 \\ f(1) &= 1-(1)^3=1-1=0 \end{aligned}$$

ומכאן ברור שהפונקציה אינה זוגית ואינה אי־זוגית.

9. הוכיחו כי פונקציה זוגית (המוגדרת על $\mathbb{R}$) אינה חד־חד־ערכית.

תהי f פונקציה זוגית המוגדרת על $\mathbb{R}$. אזי, $1\neq -1$ אבל $f(1)=f(-1)$, ולכן f אינה חד־חד־ערכית.

10. הוכיחו כי פונקציה מונוטונית חזק הנה חד־חד־ערכית.

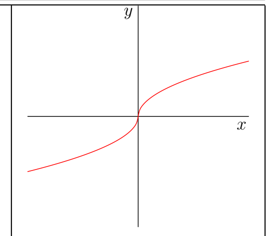
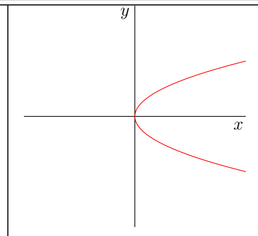
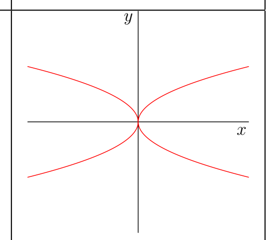
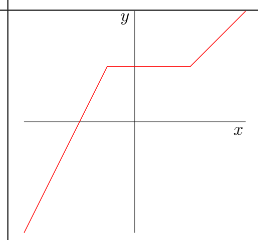
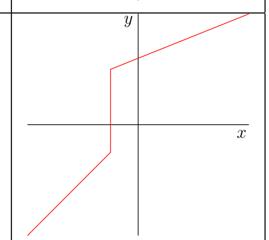
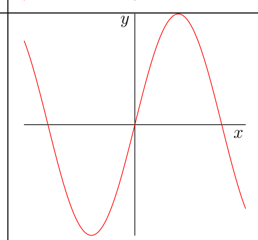
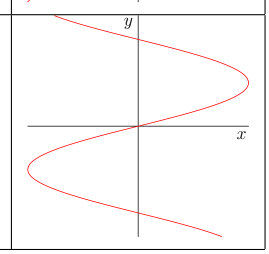
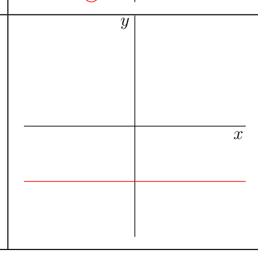
תהי f פונקציה מונוטונית חזק. יהיו $x_2\neq x_1$. אזי $f(x_1)<f(x_2)$, או לחליפין $f(x_2)<f(x_1)$, ובפרט $f(x_1)\neq f(x_2)$, ולכן f חד־חד־ערכית.

1. עבור כל אחד מן הגרפים הבאים, החליטו:

(א) האם מדובר בתיאור של פונקציה (בקטע המשורטט)

(ב) אם התשובה לשאלה (א) הייתה "כן", האם מדובר בפונקציה חד־חד־ערכית (בקטע המשורטט)

(ג) אם התשובה לשאלה (א) הייתה "כן", האם מדובר בפונקציה מונוטונית (ואם כן, אז מאיזה סוג)

גרף	מסקנות	גרף	מסקנות
	חח"ע, עולה ממש		לא פונקציה
	לא פונקציה		לא חח"ע, עולה
	לא פונקציה		לא חח"ע, לא מונוטונית
	לא פונקציה		לא חח"ע, עולה, יורדת