תרגיל 6 – פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – הערות

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

(א) $\ln(1+x)-\ln(1-x)$ **(ב)** $\ln(|x+2|)$ **(ג)** $\log_2(\log_2(x))$
(ד) $\ln(x+2)$ **(ה)** $|\ln(x+2)|$ **(ו)** $\star$ $\sqrt{\log_5(-5x)}$

פתרונות

(א) עלינו לדאוג שכל אחד מן ה־$\ln$־ים בנפרד יהיה "בסדר". זה קורה כאשר $-1<x<1$.

(ב) עלינו לדאוג שהערך המוחלט לא יתאפס, ולכן התשובה היא $x\neq-2$.

(ג) נפתור "מבפנים כלפי חוץ"; קודם כל נביט ב־$\log_2$ הפנימי. עבורו, חשוב לנו שיתקיים $x>0$. עתה, נביט בחיצוני: חשוב לנו שמה שיש בתוך ה־$\log_2$ החיצוני, יהיה גדול מ־0. כלומר: $\log_2 x>0$. **מכיוון שהפונקציה המעריכית עם בסיס** 2 **היא פונקציה עולה, מותר לנו "להפעיל" אותה בשני האגפים מבלי לשנות את הסימן של האי־שוויון:** כלומר, נרשום 2 בחזקת האגף, בכל אחד מן האגפים. זה ייראה כך:

$$\begin{aligned} 2^{\log_2 x} &> 2^0 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

ולכן נרצה ש־$x>0$ וגם $x>1$, ומספיק לדרוש $x>1$.

(ד),(ה) שימו לב כי הם זהים לחלוטין (והתשובה היא, כמובן, $x>-2$).

(ו) שוב נעבוד מבפנים החוצה: ראשית חשוב לנו כי $-5x>0$, כלומר $x<0$, ושנית, חשוב לנו כי $\log_5(-5x)\geq 0$. נעשה את אותו הטריק כמו קודם:

$$\begin{aligned} 5^{\log_5(-5x)} &\geq 5^0 \\ -5x &\geq 1 \\ x &\leq -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

ובסופו של דבר נקבל שהתשובה הסופית היא $x\leq-\frac{1}{5}$.

2. עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו אם היא חח"ע ואם היא מונוטונית (עולה, עולה חזק, יורדת או יורדת חזק):

(א) $\ln|x|$ **(ב)** $\log_2\left(1+x^2\right)$ **(ג)** $\log_2(\log_3(\log_4(x)))$

פתרונות

(א) הפונקציה אינה חח"ע ואינה מונוטונית, וזאת כי

$$\begin{aligned} \ln|-e| &= \ln e=1 \\ \ln\left|\frac{1}{e}\right| &= \ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1 \\ \ln|e| &= \ln e=1 \end{aligned}$$

(הראינו ירידה ואז עלייה)

(ב) הפונקציה אינה חח"ע ואינה מונוטונית, וזאת כי

$$\begin{aligned}\log_2\left(1+(-1)^2\right) &= \log_2 2 = 1\\ \log_2\left(1+0^2\right) &= \log_2 1 = 0\\ \log_2\left(1+1^2\right) &= \log_2 2 = 1\end{aligned}$$

(כנ"ל)

(ג) הפונקציה עולה ממש (ולכן חח"ע). נוכיח זאת: יהיו $x_1 < x_2$. אז **מכיוון ש־**$\log_a$ **היא פונקציה עולה לכל** $a > 1$**, נוכל להפעיל אותה על שני האגפים מבלי לשנות את סימן אי־השוויון. נעשה זאת:**

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2\\ \log_4 x_1 &< \log_4 x_2\\ \log_3\left(\log_4 x_1\right) &< \log_3\left(\log_4 x_2\right)\\ \log_2\left(\log_3\left(\log_4 x_1\right)\right) &< \log_2\left(\log_3\left(\log_4 x_2\right)\right)\end{aligned}$$

3. עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו מהי התמונה שלה, והאם היא על:

(א) $f:(5,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_5(x-5)$ **(ב)** ⋆ $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\ln(x))$ **(ג)** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(|x|)$

פתרונות

(א) $\mathbb{R}$ (ולכן על).

(ב) נפתור לפי השיטה השנייה שלמדנו:

$$\begin{array}{rcl}1 & <x< & \infty\\ \ln 1 & <\ln x< & \text{"}\ln\infty\text{"}\\ 0 & <\ln x< & \infty\\ \text{"}\ln 0\text{"} & <\ln(\ln x)< & \text{"}\ln\infty\text{"}\\ -\infty & <\ln(\ln x)< & \infty\end{array}$$

כלומר, התמונה של הפונקציה בסעיף זה היא $\mathbb{R}$ (ולכן היא על). ניתן לעשות את המעברים שבמרכאות יותר פורמלים על ידי שימוש במושג הגבול, שעתה אנו כבר מכירים.

(ג) $\mathbb{R}$ (ולכן על). הסבר: שימו לב כי מדובר פשוט בפונקציה $\log_2 x$ עבור ה־x־ים החיוביים (וזה לבד כבר על!), ובפונקציה $\log_2(-x)$ עבור ה־x־ים השליליים. זה שהוספנו "עוד" פונקציה, ודאי רק יכל לעזור, לא להרוס; אז אם הפונקציה המקורית כבר פגעה בכל המספרים, אז גם הפונקציה הזו פוגעת בכל המספרים.

4. הביטו בפונקציה $f(x)=\sqrt{2x+1}$. מהו תחום ההגדרה שלה? מהי התמונה שלה?

פתרון זהירות! לאחר שרושמים $y=\sqrt{2x+1}$ מפתה להעלות בריבוע, לבודד את x ולהגיע למסקנה שהתמונה הנה $\mathbb{R}$. מהלך שכזה אינו יהיה נכון. הסבר: העלאה בריבוע של שוויון הנה פעולה מסוכנת. יש להבחין בין שני מקרים: אם שני האגפים אי־שליליים, או שניהם שליליים (מה שלא ייתכן כאן), ניתן להעלות בריבוע בלי חשש. אחרת, השוויון אינו מתקיים ("סתירה"). מכאן ינבע כי התמונה הנה $[0,\infty)$.

ניתן לפתור זאת גם בדרך השנייה שלמדנו. קודם כל אנו שואלים את עצמנו מהו תחום ההגדרה. במקרה זה: $-\frac{1}{2}\le x<\infty$. לכן:

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & \le x < & \infty \\ -1 & \le 2x < & \infty \\ 0 & \le 2x+1 < & \infty \\ \sqrt{0} & \le \sqrt{2x+1} < & "\sqrt{\infty}" \\ 0 & \le \sqrt{2x+1} < & \infty \end{array}$$

כלומר, התמונה היא $[0,\infty)$.

5. עבור כל אחת מבין הפונקציות הבאות, החליטו האם היא זוגית או לא, והאם היא אי־זוגית או לא:

(א) e^x **(ב)** $e^{|x|}$ **(ג)** $\ln\left(x^2+1\right)$

קל מאד לראות שהפונקציה בסעיף א' אינה זוגית ואינה אי־זוגית, והשתיים האחרות זוגיות.

6. בדקו האם הפונקציות הבאות חסומות או לא (בתחום הגדרתן):

(א) $\sqrt{9-x^2}$ **(ב)** $\frac{x}{x^2+1}$ **(ג)** x^2-4x+8 **(ד)** $\frac{x}{|x|}$

פתרונות

(א) תחום ההגדרה הוא $-3\le x\le 3$. נמצא את התמונה של הפונקציה בתחום זה: אם $-3\le x\le 3$ אז $x^2\le 9$ (וכמובן, $x^2\ge 0$). כלומר:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \le x^2 \le & 9 \\ -0 & \ge -x^2 \ge & -9 \\ 9-0 & \ge 9-x^2 \ge & 9-9 \\ 9 & \ge 9-x^2 \ge & 0 \\ 3 & \ge \sqrt{9-x^2} \ge & 0 \end{array}$$

ולכן תמונת הפונקציה היא $[0,3]$, והפונקציה חסומה. ניתן גם לנחש זאת, כמובן.

(ב) נפתור זאת בשיטה שונה – מאחר ואין לנו כלים מספיק טובים עדיין, נפתור אותה ב"שיטת הניחוש". נשים לב ראשית כי המונה תמיד קטן מהמכנה - כלומר, $x<x^2+1$ (למה זה נכון? אתם צריכים לדעת!). לכן, אם x חיובי, כל השבר הזה גדול מ־0 אבל קטן מ־1. כמו־כן, הפונקציה הזו הנה אי־זוגית (למה זה נכון? אתם צריכים לדעת!), ולכן לכל x שלילי, כל השבר הזה יהיה בין -1 ל־0. לכן הפונקציה חסומה.

(ג) זוהי פרבולה, ולכן היא אינה חסומה.

(ד) אנחנו יודעים מהי התמונה (מצאנו אותה בעבר) - הפונקציה חסומה.

7. לכל זוג פונקציות f, g, מצאו את $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ ו־$g \circ g$, ומצאו את תחומי ההגדרה של ההרכבות הללו:

(א) $f(x) = x - 1$ $\quad g(x) = x^3$

(ב) $f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = x^5 - x$

(ג) $f(x) = x$ $\quad g(x) = x$

(ד) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 2^x$

(ה) $f(x) = x^4$ $\quad g(x) = \ln x$

פתרונות חלקיים (השיטה תמיד זהה)

(ד) מתקיים:

$$\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x} = \left(2^2\right)^x = 4^x \\
g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(x^2\right) = 2^{x^2} \\
f \circ f(x) &= f(f(x)) = f\left(x^2\right) = \left(x^2\right)^2 = x^4 \\
g \circ g(x) &= g(g(x)) = g(2^x) = 2^{2^x}
\end{aligned}$$

(ה) מתקיים:

$$\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\ln x) = (\ln x)^4 \\
g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(x^4\right) = \ln\left(x^4\right) = 4 \ln x \\
f \circ f(x) &= f(f(x)) = f\left(x^4\right) = \left(x^4\right)^4 = x^{16} \\
g \circ g(x) &= g(g(x)) = g(\ln x) = \ln(\ln x)
\end{aligned}$$

8. לכל אחת מן הפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה שלה, קבעו האם היא חח"ע (בתחום הגדרתה), מצאו את התמונה שלה, ואם היא חח"ע מצאו גם את הפונקציה ההפוכה שלה (מהתמונה אל התחום):

(א) $1-x^3$ **(ב)** $(x-4)^2+3$ **(ג)** 2^{2^x}

(ד) $\frac{x}{2}+1$ **(ה)** $\log_2\left(1+x^2\right)$ **(ו)** $\sqrt{x+1}$

(ז) $(x+1)^2$ **(ט)** $\ln|x|$

הערה בסעיף (ח) נפלה טעות דפוס, ולכן נתעלם ממנו בפתרונות.

פתרונות חלקיים

(ב) תחום ההגדרה: כל המספרים. היא אינה חח"ע מכיוון שהיא פרבולה. התמונה של $(x-4)^2$ היא $[0,\infty)$ ולכן התמונה של $(x-4)^2+3$ היא $[3,\infty)$.

(ג) תחום ההגדרה: כל המספרים. הפונקציה עולה־ממש (הראו זאת!) ולכן חח"ע. נחפש את הפונקציה ההפוכה, ותוך כדי נמצא את התמונה, ונעשה זאת ע"י בידוד x במשוואה $y=2^{2^x}$:

$$
\begin{aligned}
y &= 2^{2^x}\\
\log_2 y &= \log_2 2^{2^x}\\
\log_2 y &= 2^x\\
\log_2\left(\log_2 y\right) &= \log_2 2^x\\
\log_2\left(\log_2 y\right) &= x
\end{aligned}
$$

שימו לב שבמהלך בידוד x הנחנו מספר דברים על y; בתחילה הנחנו שהוא גדול מ־0 (כדי להוציא לו $\log_2$), ואח"כ הנחנו ש־$\log_2 y>0$ כדי להוציא $\log_2$ נוסף; אבל

$$
\begin{aligned}
\log_2 y &> 0\\
2^{\log_2 y} &> 2^0\\
y &> 1
\end{aligned}
$$

ולכן התמונה היא $(1,\infty)$ והפונקציה ההפוכה היא $g(y)=\log_2\left(\log_2 y\right)$.

(ה) תחום ההגדרה הוא כל המספרים, והפונקציה בפירוש אינה חח"ע (קל לבדוק!)

(ו) תחום ההגדרה הוא $x\geq -1$, והפונקציה עולה ממש ולכן חח"ע. נמצא את התמונה ואת הפונקציה ההפוכה:

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x+1}\\
y^2 &= x+1\\
y^2-1 &= x
\end{aligned}
$$

כמו קודם, נזכור כי הנחנו ש־$y\geq 0$ כבר בשורה הראשונה. מאז לא היו לנו "בעיות", ולכן התמונה היא $[0,\infty)$ והפונקציה ההפוכה היא $g(y)=y^2-1$.

(ט) תחום ההגדרה הנו $x\neq 0$. התמונה, כפי שראינו בשאלה 3, הנה $\mathbb{R}$. הפונקציה בודאות אינה חח"ע (שכן היא זוגית).

9. בכיתה הצגנו מספר חוקי לוגריתמים, אך לא הוכחנו את כולם. הוכיחו את שני החוקים הבאים:

(א) $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

(ב) עבור n טבעי, $\log_a x^n = n\log_a x$ (אפשר גם להוכיח זאת לכל מספר n ולא רק למספר טבעי)

הוכחות

(א) נעלה את a בחזקת כל אגף. נקבל:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x - \log_a y} &= a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)} \\ \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} &= a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)} \\ \frac{x}{y} &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

ומכאן הדרוש. (שימו לב שההוכחה זהה להוכחה שראינו בכיתה לגבי חיבור לוגריתמים)

(ב) ניזכר בכך ש־x^n הנו, למעשה, $x\cdot x\cdots x$ (n פעמים), כלומר, כדי לקבל את x^n עלינו לכפול את 1 ב־x n פעמים. נשתמש בכלל חיבור לוגריתמים ונקבל:

$$\begin{aligned} \log_a x^n &= \log_a\left(\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{n \text{ times}}\right) \\ &= \log_a\left(\left(\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{n-1 \text{ times}}\right)\cdot x\right) \\ &= \log_a\left(\left(\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{n-1 \text{ times}}\right)\right) + \log_a x \\ &= \log_a\left(\left(\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{n-2 \text{ times}}\right)\right) + \log_a x + \log_a x \\ &= \ldots \\ &= \overbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}^{n \text{ times}} = n\log_a x \end{aligned}$$

אם הצלחתם לעלות על הרעיון לבד – כל הכבוד! שאלה זו אינה טריוויאלית כלל.

שרטוט

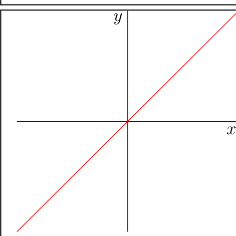
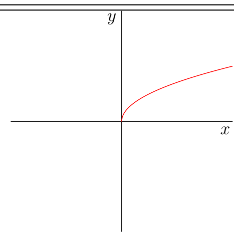
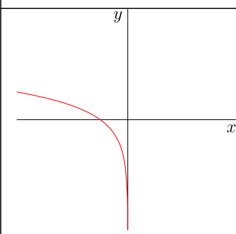
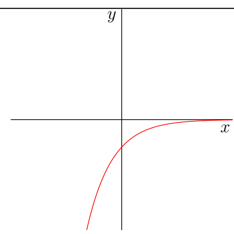
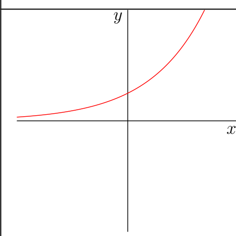
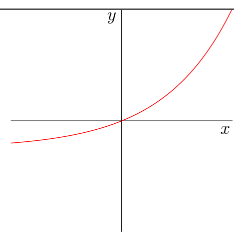
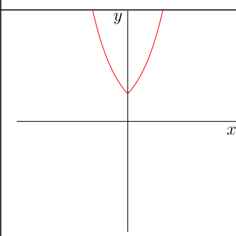
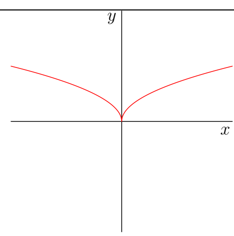
נסו להתאים את הגרפים לפונקציות המתאימות להם. לכל גרף מתאימה אך ורק פונקציה אחת.

פונקציות אפשריות:

$$e^{\frac{x}{2}},\ \log_2\left(2^x\right),\ 3^{|x|},\ \log_4\left(-x\right),\ \left(\frac{3}{2}\right)^x-1,\ \sqrt{x},\ -\left(\frac{1}{3}\right)^x,\ \sqrt{|x|}$$

לאחר מכן, נסו לקבוע <u>לפי הציור</u> האם מדובר בפונקציה חח"ע או לא, האם מדובר בפונקציה מונוטונית או לא (ומאיזה סוג), והאם מדובר בפונקציה זוגית או אי־זוגית או לא ולא.

גרפים:

גרף	פונקציה	גרף	פונקציה
	$\log_2\left(2^x\right)$ – עולה ממש, אי־זוגית		$\sqrt{x}$ – עולה ממש
	$\log_4\left(-x\right)$ – יורדת ממש		$-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ – עולה ממש
	$e^{\frac{x}{2}}$ – עולה ממש		$\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$ – עולה ממש
	$3^{\|x\|}$ – לא חח"ע, זוגית		$\sqrt{\|x\|}$ – לא חח"ע, זוגית