תרגיל 8 – גבולות (i)

1. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to 1} x^5$ **(ב)** $\lim_{x\to 2} 2^x$ **(ג)** $\lim_{x\to 9} \log_3 x$ **(ד)** $\lim_{x\to 17} 13$ **(ה)** $\lim_{x\to -3} (x-x)$

פתרונות

(א),(ב),(ג) פונקציה אלמנטרית ומוגדרת בסביבה ולכן אפשר להציב.

(ד) .13

(ה) .0

2. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ **(ב)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$ **(ג)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

(ד) $\lim_{x\to -5} \frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$ **(ה)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$ **(ו)** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

(ז) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3+2x^2-5x}{x^3-2x^2+1}$ **(ח)** $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4+x^3+2x^2-5x+6}{3x^3+10x}$ **(ט)** $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2+x-3}{x+5}-3x\right)$

(י) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(2x+3)(4x-1)+1}{x}$ **(יא)** $\star$ $\lim_{x\to \infty} \frac{(3x-1)^{20}(2x+3)^{10}}{(2x-1)^{30}}$

פתרונות

(א) נשים לב כי בשבר זה קיימת חלוקה של מספר במשהו ששואף ל־0. במקרה כזה, צריך לבדוק את הגבול משמאל ומימין בנפרד. מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-8}{x^2-4} &= \infty \\ \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-8}{x^2-4} &= -\infty\end{aligned}$$

ולכן הגבול אינו קיים.

(ב) לפי וייטה המונה מתפרק ל־$(x-2)(x+1)$ וניתן לצמצם עם המכנה ואז להציב.

(ג) לפי כפל מקוצר המונה מתפרק ל־$(x-3)(x+3)$ וניתן לצמצם עם המכנה ואז להציב.

(ד) מתקיים:

$$\lim_{x\to -5} \frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35} = \lim_{x\to -5} \frac{2(x-5)(x+5)}{2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+5)} = \lim_{x\to -5} \frac{x-5}{x-\frac{7}{2}} = \frac{-10}{-\frac{17}{2}} = \frac{20}{17}$$

(ה) לפי וייטה המונה מתפרק ל־$(x-3)(x+2)$ והמכנה ל־$(x-3)(x+3)$ וניתן לצמצם ואז להציב.

(ו) מתקיים:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(ז) לפי **כלל האצבע** הגבול הנ"ל הוא 3 (מנת המקדמים המובילים).

(ח) לפי **כלל האצבע** הגבול הנ"ל הוא ∞ (המונה מדרגה גבוהה מהמכנה).

(ט) קודם כל דואגים שהכל יהיה באותו השבר. בעזרת כלל האצבע נסיק:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-3}{x+5}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3-3x(x+5)}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-14x-3}{x+5}=-14$$

(י) נפתח סוגריים ונקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{8x^3+18x^2+7x-2}{x}=\lim_{x\to0}\left(8x^2+18x+7\right)-\lim_{x\to0}\frac{2}{x}$$

גבול זה אינו קיים, מאחר והגבול הראשון הוא 7 והגבול השני אינו קיים.

(יא) אין צורך לפתוח את הסוגריים, אפשר לראות שבמונה יש פולינום ממעלה 30, ושהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר שם הוא $3^{20}\cdot2^{10}$; במכנה לעומת זאת, יש פולינום ממעלה 30, אך המקדם של החזקה הגבוהה ביותר שם הוא 2^{30}. לפי כלל האצבע הגבול יהיה מנת המקדמים הללו, כלומר

$$\frac{3^{20}\cdot2^{10}}{2^{30}}=\frac{3^{20}}{2^{20}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$$

3. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(ב) $\lim_{x\to\infty}5\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(ג) $\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(ד) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(ה) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$

(ו) $\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

(ז) $\lim_{x\to3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

(ח) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

(ט) $\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

(י) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x}$

(יא) $\star$ $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

(יב) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(יג) $\star$ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x+1}-x^2\right)$

(יד) $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}$

(טו) $\lim_{x\to4^+}\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

פתרונות

(א) יש לנו פה מצב של "$\infty - \infty$"; נכפול בצמוד ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

(ב) לפי סעיף א' ואריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to\infty}5\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=5\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=5\cdot 0=0$$

(ג) אי אפשר לפרק את זה כאן למכפלה של גבולות, כי נקבל גבול מהצורה "$0\cdot\infty$" שעליו אנו לא יודעים הרבה. במקום, נכפול בצמוד כמו קודם ונקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} &= \lim_{x\to\infty}x\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ד) במקרה זה כלל אין בעיה ־ השורש שואף לאינסוף וגם ה־$-x$ שואף לאינסוף, ונקבל גבול מהצורה "$\infty+\infty$", כלומר ∞.

(ה) נכפול בצמוד כמו בסעיף א' ונקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-4x^2}{\sqrt{x^2+1}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{-3+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=-\infty\end{aligned}$$

(ו) לפי כפל מקוצר המונה מתפרק ל־$\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)$ וניתן לצמצם עם המכנה ואז להציב.

(ז) נכפול בצמוד ונקבל:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}\cdot\frac{3+\sqrt{x+6}}{3+\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{2(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{2\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{12}$$

(ח) נכפול בצמוד ונקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+2}+2}{\sqrt{x^2+x+2}+2} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2-4}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

(ט) נפתר בעזרת טור טלסקופי. עשינו תרגיל זהה בכיתה עם $\sqrt[5]{x}$.

(י) נכפול בצמוד ונקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}} &= \lim_{x\to 1}\frac{5x-1-(x+3)}{x(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{x(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4}{x\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\right)}=\frac{4}{4}=1\end{aligned}$$

(יא) נכפול ונחלק בשני הצמודים גם יחד. נקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x}{\sqrt{x^2+x+x}-x} &= \lim_{x\to -2}\frac{x^2+5-9}{x^2+x+2-x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x}{\sqrt{x^2+5}+3}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}\\ &= \frac{-4(2+2)}{3+3}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

(יב) נכפול בצמוד ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$$

(יג) נכפול בצמוד ונקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x+1}-x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{x^4+x+1}+x^2}{\sqrt{x^4+x+1}+x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1-x^4}{\sqrt{x^4+x+1}+x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x+1}+x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1\right)}=0\end{aligned}$$

(יד) הנקודה הבעייתית של הערך המוחלט במונה היא 2, ולשם אנו שואפים, ולכן נבדוק גבולות מימין ומשמאל. מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}1=1\\ \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(-1)=-1\end{aligned}$$

(טו) הגבול הוא ∞ (משהו חיובי לחלק למשהו חיובי השואף ל־0).

4. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to 1}\frac{3^{x+1}-4^x}{2^x+3^{x-1}}$ **(ב)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-4^x}{2^x+3^{x-1}}$ **(ג)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x+1}-4^x}{2^x+3^{x-1}}$

(ד) $\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 7^x-4\cdot 5^x}{5^x-7^x}$ **(ה)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cdot 7^x-4\cdot 5^x}{5^x-7^x}$ **(ו)** $\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 7^x-4\cdot 5^x}{5^x-7^x}$

פתרונות

(א) הפונקציה היא אלמנטרית ומוגדרת היטב בסביבת 1, לכן ניתן להציב. נקבל:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot 3^x-4^x}{2^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x}=\frac{3\cdot 3^1-4^1}{2^1+\frac{1}{3}\cdot 3^1}=\frac{5}{3}$$

(ב) נוציא בסיס גבוה כגורם משותף כפוי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x\left(3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right)}{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\frac{0-1}{0+\frac{1}{3}}=-\infty$$

(ג) נוציא בסיס גבוה כגורם משותף כפוי:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x\left(3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right)}{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{3}}$$

מאחר וזהו גבול ב־$-\infty$, הוצאת בסיס גבוה כגורם משותף אינה מועילה כאן! במקום, נוציא בסיס נמוך כגורם משותף. נקבל:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\left(3-\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)}{2^x\left(1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\left(\frac{4}{3}\right)^x}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x}=0\cdot3=0$$

(ד) נפעל באופן דומה לאופן בו פעלנו בסעיף ב':

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot7^x-4\cdot5^x}{5^x-7^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{7^x\cdot\left(3-4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^x\right)}{7^x\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{-1}=-3$$

(ה) נפעל באופן דומה לאופן בו פעלנו בסעיף ג':

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x\left(3\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^x-4\right)}{5^x\left(1-\left(\frac{7}{5}\right)^x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^x-4}{1-\left(\frac{7}{5}\right)^x}=-4$$

(ו) נקבל שהמונה שואף ל־-1 והמכנה ל־0. על־כן, נצטרך לבדוק גבולות חד־צדדיים. מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{3\cdot7^x-4\cdot5^x}{5^x-7^x}&=\infty\\ \lim_{x\to0^-}\frac{3\cdot7^x-4\cdot5^x}{5^x-7^x}&=-\infty\end{aligned}$$

ועל־כן הגבול אינו קיים.

5. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to1}\frac{1}{\log_3 x}$ **(ב)** $\lim_{x\to\infty}\left(\log_2(2x)-\log_2(x+1)\right)$ **(ג)** $\lim_{x\to\infty}\ln e^{\frac{x+1}{7x}}$

פתרונות

(א) הגבולות החד־צדדיים שונים ולכן הגבול אינו קיים.

(ב) נזכר בחוקי לוגריתמים, ונקבל שהגבול הנ"ל שווה ל:

$$\lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\log_2 2=1$$

(ג) שום נזכר בחוקי לוגריתמים, ונקבל שהגבול הנ"ל שווה ל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{7x}=\frac{1}{7}$$

6. חשבו את הגבולות הבאים (או קבעו שאינם קיימים):

(א) $\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\frac{1}{x^2}\right)$ **(ב)** $\lim_{x\to 2}\frac{\sin x}{x}$ **(ג)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x-5)}{x-5}$

(ד) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-5)}{x-5}$ **(ה)** $\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x-5}$ **(ו)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(100x)}{x}$

(ז) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ **(ח)** $\lim_{x\to 2}\frac{(2x-2)\cdot\sin(x-2)}{x^2-3x+2}$ **(ט)** $\lim_{x\to\infty}\cos x$

(י) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ **(יא)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x+1}\right)$ **(יב)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(73x)}{\sin(27x)}$

(יג) $\lim_{x\to -1}\frac{\sin(1+x)}{1-x^2}$ **(יד)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{x}$ **(טו)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x}$

פתרונות

(א) 1.

(ב) $\frac{\sin 2}{2}$.

(ג) לפי המסקנה מכלל הסנדביץ'; מדובר כאן בגבול של פונקציה חסומה ($\sin(x-5)$) ופונקציה השואפת ל־0 ($\frac{1}{x-5}$), ולכן הגבול הוא 0.

(ד) $\frac{\sin 5}{5}$.

(ה) לפי משפט הגבול הוא 1.

(ו) מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(100x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(100x)}{100x}\cdot 100=100$$

(ז) נחשוב על $\sin x$ כעל $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$ ונקבל:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to\pi}2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$

(ח) מתקיים:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-1)\cdot\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}2\frac{\sin(x-2)}{x-2}=2$$

(ט) לא קיים (הסברנו בכיתה).

(י) ראו סעיף ג'.

(יא) נפרק את הגבול לשני גבולות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x+1}$$

הגבול הראשון הוא 1. הגבול השני הוא 0 (ראו סעיף ג'). לכן הגבול כולו הוא 1.

(יב) מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(73x)}{\sin(27x)}\cdot\frac{27x}{27x}\cdot\frac{73x}{73x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(73x)}{73x}\cdot\frac{27x}{\sin(27x)}\cdot\frac{73x}{27x}\\ &= 1\cdot 1\cdot\frac{73}{27}=\frac{73}{27}\end{aligned}$$

(יג) מתקיים:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(1+x)}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}$$

(יד) -1.

(טו) האם ה־$\cos x$ משנה משהו?