

תרגיל 11 – הנגזרת

1. עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו האם היא גזירה ב-0 והאם היא גזירה ב-1:

$$f_1(x) = |x| \quad f_2(x) = |x - 1| \quad f_3(x) = |x| - 1 \quad f_4(x) = -|x - 1|$$

$$f_5(x) = |x| - |x - 1| \quad f_6(x) = |x^2| \quad f_7(x) = |x^2 - 1| \quad f_8(x) = \sqrt[5]{x}$$

2. חשבו לפי ההגדרה (אחת מהשתיים) את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2 + 5x + 8$.

3. חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos x$.

4. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{4} \quad (\text{א}) \quad f(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = (3x + 1) \left(5 - \frac{1}{x}\right) \quad (\text{ד}) \quad f(x) = \frac{3}{x + 2} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{2x - 5}{x + 3} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \quad (\text{ז}) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = (x^2 - 5) \left(\frac{1}{x} + 3\right) \quad (\text{ט})$$

5. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right)^2 \quad (\text{א}) \quad f(x) = (3x^2 - 2)(4 + 3x)^3 \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad (\text{ד}) \quad f(x) = \sqrt[5]{x^4} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{1}{(5x + 2)^4} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \quad (\text{ז}) \quad f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2-3x} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}} \quad (\text{ט})$$

6. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x \cos x \quad (\text{א}) \quad f(x) = \cot x \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \sin(2x) \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \sin(\cos x) \quad (\text{ד}) \quad f(x) = \cos(\sin x) \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = \sin^2(\cos^4 x) \quad (\text{ז}) \quad f(x) = \cos(\tan^3 x) \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \tan(\sin^2 x) \quad (\text{ט})$$

7. חשבו באמצעות המשפט אודות נגזרת של פונקציה הפוכה את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arccos x$.

8. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הפיכה, ונניח כי $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$. האם $f^{-1}(x)$ גזירה ב-2? אם לא, הסבירו מדוע. אם כן, חשבו את $(f^{-1})'(2)$.

9. חשבו (בכל דרך תקינה) את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \quad (\text{א}) \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{1-x}} \quad (\text{ב}) \quad f(x) = (x^3+3x+4)^{20} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = e^{x \sin^2 x} \quad (\text{ד}) \quad f(x) = x \arctan(x^2) \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2-1}} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = 3^{4^x} \quad (\text{ז}) \quad f(x) = 2^{\arcsin(3x)} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \ln(x^7+3x^6+3) \quad (\text{ט})$$

10. הוכיחו או הפריכו: פונקציה שאינה חסומה ב- $[a, b]$ אינה גזירה בקטע הסגור $[a, b]$.

11. מצאו דוגמה לפונקציה רציפה וגזירה על כל הישר, מלבד נקודה אחת שבה היא אינה רציפה, ונקודה אחת אחרת שבה היא רציפה אך לא גזירה.

12. * ידוע כי רציפה ב- $x=2$, ומקיימת

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \pi - 3(x-2)}{x-2} = 0$$

חשבו את $f(2)$ ואת $f'(2)$.

13. יהיו $f(x), g(x)$ שתי פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי, $g(x)$ גזירה על כל הישר הממשי.

נגדיר $h_1(x) = f(x) + g(x)$ ו- $h_2(x) = f(x)g(x)$. ענו על כל אחד מן הסעיפים הבאים בנפרד:

(א) אם ידוע כי $h_1(x)$ גזירה על כל הישר הממשי - האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי?

(ב) אם ידוע כי $h_2(x)$ גזירה על כל הישר הממשי - האם נובע כי $f(x)$ גזירה על כל הישר הממשי?

14. * תנו דוגמה לפונקציה שאינה גזירה באינסוף נקודות שונות.