תרגיל 13 – משפטי רול ולגראנז' – הערות

1. האם קיים פתרון למשוואה $e^x = x+1$ בקרן $(0,\infty)$? (רמז: ביחרו $f(x) = e^x - x - 1$, הניחו שיש פתרון בקרן, השתמשו במשפט רול והגיעו לסתירה!)

פתרון נגדיר $f(x) = e^x - x - 1$. נניח כי יש פתרון בקרן הנ"ל. נסמנו ב־b. נשים לב כי גם 0 הוא פתרון. על־כן,

$$f(0) = f(b) = 0$$

ולכן אפשר להשתמש במשפט רול, ולהסיק כי קיימת $c \in (0,b)$ עבורה $f'(c) = 0$. אבל:

$$f'(x) = e^x - 1$$

כלומר $f'(c) = e^c - 1$, ולכן

$$\begin{aligned} e^c - 1 &= 0 \\ e^c &= 1 \end{aligned}$$

ולכן $c = 0$, וזו <u>סתירה</u>.

2. האם קיים פתרון למשוואה $\ln(1+x) = x$ בקרן $(0,\infty)$?

פתרון נגדיר $f(x) = \ln(1+x) - x$. נניח כי יש פתרון בקרן הנ"ל. נסמנו ב־b. נשים לב כי גם 0 הוא פתרון. על־כן,

$$f(0) = f(b) = 0$$

ולכן אפשר להשתמש במשפט רול, ולהסיק כי קיימת $c \in (0,b)$ עבורה $f'(c) = 0$. אבל:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$

כלומר $f'(c) = \frac{1}{1+c} - 1$, ולכן

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+c} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{1+c} &= 1 \\ 1+c &= 1 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

וזו <u>סתירה</u>.

3. האם קיים פתרון למשוואה $\sin x = 2x$ בקרן $(0,\infty)$?

פתרון נגדיר $f(x) = \sin x - 2x$. נניח כי יש פתרון בקרן הנ"ל. נסמנו ב־b. נשים לב כי גם 0 הוא פתרון. על־כן,

$$f(0) = f(b) = 0$$

ולכן אפשר להשתמש במשפט רול, ולהסיק כי קיימת $c \in (0,b)$ עבורה $f'(c) = 0$. אבל:

$$f'(x) = \cos x - 2$$

כלומר $f'(c) = \cos c - 2$, ולכן

$$\begin{aligned} \cos c - 2 &= 0 \\ \cos c &= 2 \end{aligned}$$

וזו כמובן סתירה.

4. הוכיחו:

(א) לכל $x < y$ מתקיים: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

(ב) לכל $0 < a < b$ מתקיים: $\frac{a-b}{a} < \ln\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a-b}{b}$

(ג) לכל $a < c < b$ מתקיים: $\left(e^{-b} - e^{-c}\right)(c - a) > \left(e^{-c} - e^{-a}\right)(b - c)$

(ד) לכל $-1 \leq a \leq b \leq 1$ מתקיים: $\arccos(b) - \arccos(a) \leq a - b$

הוכחות

(א) נגדיר $f(x) = \arctan x$. לפי משפט לגראנז' (מאחר ו־f רציפה וגזירה בקטע) מתקיים

$$\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = f'(c) = \frac{1}{1 + c^2}$$

עבור $c \in (x, y)$. לכן:

$$\frac{|\arctan x - \arctan y|}{|x - y|} = \left|\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y}\right| = \left|\frac{1}{1 + c^2}\right| < 1$$

נכפול ב־$|x - y|$ ונקבל את הדרוש.

(ב) יהיו $0 < a < b$, ונסמן $f(x) = \ln x$. לפי משפט לגראנז' (מאחר ו־f רציפה וגזירה בקטע) קיים $c \in (a,b)$ עבורו

$$\frac{1}{c} = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

מצד שני, ברור כי $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ ולכן

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

ומאחר ו־$(b-a)$ חיובי, נוכל להכפיל בו ולקבל

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

הכפלה ב־(-1) תתן:

$$\frac{a-b}{a} < \ln a - \ln b < \frac{a-b}{b}$$

ועל־פי חוקי לוגריתמים נקבל:

$$\frac{a-b}{a} < \ln\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a-b}{b}$$

כדרוש.

(ג) נסמן $f(x) = e^{-x}$. לפי משפט לגראנז' (מאחר ו־f רציפה וגזירה בקטע) מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{e^{-b} - e^{-c}}{b - c} &= f'(d_1) \\ \frac{e^{-c} - e^{-a}}{c - a} &= f'(d_2) \end{aligned}$$

כאשר $d_1 \in (c,b)$ ו־$d_2 \in (a,c)$ (ולכן $d_2 < d_1$), וכמובן $f'(x) = -e^{-x}$. נשים לב כי:

$$\begin{aligned} d_2 &< d_1 \\ -d_2 &> -d_1 \\ e^{-d_2} &> e^{-d_1} \\ -e^{-d_2} &< -e^{-d_2} \\ f'(d_2) &< f'(d_1) \end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{e^{-b} - e^{-c}}{b - c} = f'(d_1) > f'(d_2) = \frac{e^{-c} - e^{-a}}{c - a}$$

וע"י כפל במכנים (שהם חיוביים) נקבל:

$$\left(e^{-b} - e^{-c}\right)(c - a) > \left(e^{-c} - e^{-a}\right)(b - c)$$

(ד) נגדיר $f(x) = \arccos x$. ממשפט לגראנז' קיימת $c \in (a, b)$ עבורה

$$\frac{-1}{\sqrt{1-c^2}} = f'(c) = \frac{\arccos b - \arccos a}{b-a}$$

לכן

$$\frac{\arccos b - \arccos a}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \geq 1$$

ומכיוון ש־$(a-b)$ שלילי, נקבל

$$\arccos b - \arccos a \leq a - b$$

כדרוש.

5. הוכיחו את אי השוויון הבא:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

פתרון נסמן $f(x) = \arctan x$. נשים לב כי $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. על־פי משפט לגראנז',

$$\frac{\arctan \frac{4}{3} - \arctan 1}{\frac{4}{3} - 1} = f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

עבור $c \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$. נשים לב כי

$$\frac{9}{25} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\frac{9}{25} < & \quad \frac{\arctan\frac{4}{3} - \arctan 1}{\frac{1}{3}} & < \frac{1}{2} \\
\frac{3}{25} < & \quad \arctan\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} & < \frac{1}{6} \\
\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < & \quad \arctan\frac{4}{3} & < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

כדרוש.

6. הוכיחו בעזרת משפט לגראנז', כי אם הנגזרת של פונקציה שווה ל־0 בכל נקודה בקטע $[a,b]$, אז f קבועה בקטע זה.

הוכחה יהיו שתי נקודות, c,d, $c<d$, בקטע $[a,b]$. ע"פ משפט לגראנז', מאחר והפונקציה רציפה וגזירה בקטע, קיים $k\in(c,d)$ עבורו

$$\begin{aligned} \frac{f(d)-f(c)}{d-c} &= f'(k)=0 \\ f(d)-f(c) &= 0 \\ f(d) &= f(c) \end{aligned}$$

הראינו כי לכל c,d בקטע, $f(c)=f(d)$, ועל־כן f קבועה בקטע הנ"ל.

7. מצאו כמה פתרונות <u>בדיוק</u> יש למשוואה $x^5+10x=15$.

פתרון נביט בפונקציה $f(x)=x^5+10x-15$. כפולינום מדרגה אי־זוגית, אנו יודעים שיש לו לפחות שורש אחד. נסמן שורש זה ב־a. נניח בשלילה כי יש פתרון נוסף, b, בקרן (a,∞). אז, לפי משפט רול, קיים $c\in(a,b)$ עבורו $f'(c)=0$. אבל,

$$f'(x)=5x^4+10>0$$

וזו <u>סתירה</u>. בדומה, מניחים בשלילה כי יש פתרון נוסף d בקרן $(-\infty,a)$ ומגיעים לאותה הסתירה.
דרך נוספת: מהגזירה הגענו למסקנה מעניינת - הפונקציה תמיד עולה. אם היא תמיד עולה, לא ייתכן שיש לה יותר ממפגש אחד עם ציר ה־x, ולכן אין יותר משורש אחד.

8. $\star$ נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,2]$ ומקיימת $f(0)=f(2)$ ו־$f(1)>f(0)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ עבורה $f(c)=f(c+1)$.

רמז: ניתן להשתמש בפונקציית העזר $g(x)=f(x)-f(x+1)$, ולהיעזר במשפט ערך הביניים.

פתרון נגדיר פונקצית עזר: $g(x)=f(x)-f(x+1)$. נשים לב כי

$$g(0)=f(0)-f(1)<0$$

(שכן נתון לנו ש־$f(1)>f(0)$). כמו כן,

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1)-f(2) \\ &= f(1)-f(0)>0 \end{aligned}$$

מאותה הסיבה ממש. כמו כן, g הנה רציפה (כסכום של רציפות), ולכן ממשפט ערך הביניים קיימת $c\in(0,1)$ עבורה $g(c)=0$, כלומר

$$\begin{aligned} f(c)-f(c+1) &= 0 \\ f(c) &= f(c+1) \end{aligned}$$

כדרוש.

9. תהי $f(x)$ פונקציה חיובית גזירה ב־$\mathbb{R}$ עבורה מתקיים $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ וגם $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. הוכיחו כי קיים $c\in\mathbb{R}$ עבורו $f'(c)=0$. **רמז:** משפט רול.

הוכחה נביט בנקודה $x_0=0$. אם היא נקודת מקסימום, הנגזרת בה היא 0 (לפי משפט פרמה) וסיימנו. אחרת, יש מימינה או משמאלה נקודה x_1 שגבוהה ממנה (כלומר $f(x_1)>f(x_0)$). נניח ש־x_1 מימינה של x_0 (זה לא באמת משנה; אתם מוזמנים לבדוק את המקרה השני). כלומר, הפונקציה עולה מ־x_0 ימינה לכיוון x_1. מכיוון שהפונקציה חיובית, היא צריכה לרדת "חזרה ל־0", וממשפט ערך הביניים, תהיה בין x_1 ל־∞ נקודה שגובהה בדיוק הגובה של x_0 (ציירו והיווכחו!). נקרא לנקודה הזו x_2. כלומר, $f(x_0)=f(x_2)$. ממשפט רול נקבל את הדרוש.

10. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $(1,3)$. נניח כי מתקיים $f(1)=f(2)=f(3)$. הראו כי קיימת $c\in(1,3)$ עבורה $f''(c)=0$. **רמז:** משפט רול.

הוכחה מאחר ו־$f(1)=f(2)$ ו־f גזירה, קיימת, לפי משפט רול, $a\in(1,2)$ עבורה $f'(a)=0$. בדומה, מאחר ו־$f(2)=f(3)$, קיימת, לפי משפט רול, $b\in(2,3)$ עבורה $f'(b)=0$. לכן

$$f'(a)=0=f'(b)$$

עבור $a<b$. מאחר ו־f' גזירה (כי f גזירה פעמיים), נובע ממשפט רול כי קיימת $c\in(a,b)$ עבורה

$$f''(c)=0$$

כדרוש.

11. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[-1,1]$. נניח כי $f(-1)+f(1)=2f(0)$. הראו כי קיימת $c\in(-1,1)$ עבורה $f''(c)=0$. **רמז:** משפטי לגראנז' ורול.

הוכחה נביא את המשוואה לצורה של משפט לגראנז'. נקבל:

$$f(1)-f(0)=f(0)-f(-1)$$

או, יותר טוב:

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}$$

לפי משפט לגראנז', קיימת $a\in(-1,0)$ עבורה

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f'(a)$$

וקיימת $b\in(0,1)$ עבורה

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(b)$$

לכן, עבור a,b אלה המקיימים $a<b$, מתקיים

$$f'(a)=f'(b)$$

מאחר ו־f' גזירה (שכן f גזירה פעמיים), לפי משפט רול נובע כי קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $f''(c)=0$, כדרוש.

12. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים

$$(1+x)^{2011}>1+2011x$$

הוכחה נגדיר $f(x)=(1+x)^{2011}$. נשים לב כי $f(0)=1$. נרשום את אי השוויון שלעיל בצורה חדשה:

$$\begin{aligned}(1+x)^{2011}-1 &> 2011x\\ f(x)-f(0) &> 2011x\\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &> 2011\end{aligned}$$

כאשר את המעבר האחרון ביצענו מתוך ידיעה ש־x חיובי. באגף שמאל רשומה לנו צורת לגראנז'. על פי משפט לגראנז' (ומאחר ו־f גזירה!), קיים $c\in(0,x)$ עבורו אגף שמאל שווה ל־$f'(c)$. נגזור את f:

$$f'(x)=2011(1+x)^{2010}$$

לכן

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2011(1+c)^{2010}>2011$$

כדרוש.

13. הוכיחו כי לכל x חיובי מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} > 1 - \frac{x}{2}$$

הוכחה נגדיר $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. נשים לב כי $f(0) = 1$. נרשום את אי השוויון הנתון מחדש:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 &> -\frac{x}{2} \\ f(x) - f(0) &> -\frac{x}{2} \\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

כאשר את המהלך האחרון ביצענו מתוך ידיעה ש־x חיובי. באגף שמאל רשומה לנו צורת לגראנז'. על פי משפט לגראנז' (ומאחר ו־f גזירה!), קיים $c \in (0, x)$ עבורו אגף שמאל שווה ל־$f'(c)$. נגזור את f:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}$$

ולכן נותר לנו להראות כי

$$-\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2} > -\frac{1}{2}$$

לכל x חיובי. אכן, כפל ב־(-2) ייתן:

$$\begin{aligned} (x+1)^{-3/2} &< 1 \\ \frac{1}{(x+1)^{3/2}} &< 1 \end{aligned}$$

וברור כי שוויון זה הנו נכון.

14. הוכיחו כי לכל x חיובי מתקיים

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$$

הוכחה נגדיר $f(x) = \ln x$. נרשום את אי השוויון בצורה חדשה, וניעזר בחוקי לוגריתמים:

$$\begin{aligned} \ln(x+1) - \ln x &> \frac{1}{x+1} \\ f(x+1) - f(x) &> \frac{1}{x+1} \\ \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} &> \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

באגף שמאל רשומה לנו צורת לגראנז'. על פי משפט לגראנז' (ומאחר ו־f גזירה!), קיים $c \in (x, x+1)$ עבורו אגף שמאל שווה ל־$f'(c)$. נגזור את f:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

ולכן

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$$

כדרוש.

15. הוכיחו כי לכל x חיובי מתקיים

$$\sin x < x$$

רמז כמעט הראנו זאת כבר בכיתה!

הוכחה ראינו שלכל x, y מתקיים

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

נציב $y = 0$ ונקבל שלכל x מתקיים

$$|\sin x - \sin 0| \leq |x - 0|$$

כלומר

$$|\sin x| \leq |x|$$

עתה נביט רק ב־x־ים חיוביים (עליהם שאלו). לכן מתקיים

$$\sin x \leq |\sin x| \leq x$$

כמו כן, שוויון מתקיים רק ב־0. נראה זאת: לכל $x > 1$, ברור כי $\sin x < x$. לכן נתבונן רק ב־x־ים בקטע $(0, 1)$. נגדיר $f(x) = \sin x - x$. נשים לב כי $f(0) = 0$. כמו כן,

$$f'(x) = \cos x - 1$$

אבל $\cos x < 1$ לכל $x \in (0, 1)$, ולכן f יורדת בקטע זה, ולכן $f(x) < f(0) = 0$ לכל $x \in (0, 1)$, כלומר $\sin x < x$, כדרוש.