תרגיל 15 – הישר המשיק – הערות

1. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3$ בנקודה $x=-2$.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8 \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f'(-2) &= 12 \end{aligned}$$

ולכן $a=12$, ומתקיים $\ell(x)=12x+b$, אך $\ell(-2)=-8$ ולכן

$$\begin{aligned} 12\cdot(-2)+b &= -8 \\ b &= 16 \end{aligned}$$

ולכן $\ell(x)=12x+16$.

2. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ בנקודה $x=1$.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן $a=\frac{1}{2}$ ומתקיים $\ell(x)=\frac{x}{2}+b$, אך $\ell(1)=1$ ולכן

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+b &= 1 \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן $\ell(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

3. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ בנקודה $x=2$.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f'(2) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ולכן $a=-\frac{1}{4}$ ומתקיים $\ell(x)=-\frac{x}{4}+b$, אך $\ell(2)=\frac{1}{2}$ ולכן

$$\begin{aligned} -\frac{2}{4}+b &= \frac{1}{2} \\ b &= 1 \end{aligned}$$

ולכן $\ell(x)=-\frac{x}{4}+1$.

4. $\star$ מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ המקביל (כלומר, בעל שיפוע זהה) לישר $y=-x-5$.

פתרון מתקיים

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

אנחנו רוצים שהשיפוע של המשיק יהיה כמו השיפוע של הישר $y=-x-5$, כלומר -1. דהיינו, $\ell(x)=-x+b$. באיזו נקודה על הגרף של f השיפוע הוא -1? בנקודה עבורה

$$f'(x)=-1$$

כלומר

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} &= -1 \\ 1 &= x^2 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

ולכן למעשה יש שתי נקודות כאלה. עבור כל נקודה הישר המשיק שונה:

עבור $x=-1$ מתקיים

$$f(-1)=\frac{1}{-1}=-1$$

ולכן $\ell_1(-1)=-1$, כלומר

$$\begin{aligned} -(-1)+b_1 &= -1 \\ b_1 &= -2 \end{aligned}$$

ולכן $\ell_1(x)=-x-2$.

עבור $x=1$ מתקיים

$$f(1)=\frac{1}{1}=1$$

ולכן $\ell_2(1)=1$, כלומר

$$\begin{aligned} -1+b_2 &= 1 \\ b_2 &= 2 \end{aligned}$$

ולכן $\ell_2(x)=-x+2$.

5. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $x=1$.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned} f(1) &= e \\ f'(x) &= e^x \\ f'(1) &= e \end{aligned}$$

ולכן $a=e$ ומתקיים $\ell(x)=ex+b$, אך $\ell(1)=e$ ולכן

$$\begin{aligned} e\cdot 1+b &= e \\ b &= 0 \end{aligned}$$

ולכן $\ell(x)=ex$.

6. מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned} f(e) &= \ln e=1 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(e) &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

ולכן $a=\frac{1}{e}$ ומתקיים $\ell(x)=\frac{x}{e}+b$, אך $\ell(e)=1$ ולכן

$$\begin{aligned} \frac{e}{e}+b &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

ולכן $\ell(x)=\frac{x}{e}$.

7. ⋆ מצאו את הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln|x|$ בנקודה $x = -e$.

פתרון מתקיים

$$f(-e) = \ln e = 1$$

לכל x שלילי הפונקציה היא בעצם $f(x) = \ln(-x)$. לכן:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \\ f'(-e) &= \frac{1}{-e} = -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

ולכן $a = -\frac{1}{e}$ ומתקיים $\ell(x) = -\frac{x}{e} + b$, אך $\ell(-e) = 1$ ולכן

$$\begin{aligned} -\frac{-e}{e} + b &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

ולכן $\ell(x) = -\frac{x}{e}$.

8. מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ שבהן המשיק מקביל לציר ה־x.

אלו הן בדיוק הנקודות שבהן הנגזרת של f מתאפסת.

9. מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $f(x) = \sin x$ שבהן המשיק מקביל לציר ה־x.

אלו הן בדיוק הנקודות שבהן הנגזרת של f מתאפסת. כלומר, כל הנקודות עבורן $\cos x = 0$, כלומר $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

10. מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $f(x) = \tan x$ שבהן המשיק מקביל לציר ה־x.

אלו הן בדיוק הנקודות שבהן הנגזרת של f מתאפסת. כלומר, כל הנקודות עבורן $\frac{1}{\cos^2 x} = 0$; מובן כי אין נקודות כאלה כלל.