תרגיל 16 – קירוב לינארי – הערות

1. חשבו קירוב לינארי עבור כל אחד מן הביטויים הבאים:

(א) $\sqrt{9.2}$ **(ב)** $\sqrt[3]{127}$ **(ג)** $\cos(0.05)$

(ד) $\sqrt[3]{65}$ **(ה)** $e^{0.1}$ **(ו)** $\frac{1}{9^{2/3}}$

פתרונות

(א) נגדיר $f(x)=\sqrt{x}$. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־9.2, אך שאנו יודעים את השורש שלה. 9 היא נקודה מוצלחת. כדי למצוא את המשיק ל־f ב־9, נגזור את f:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 9:

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(9)+f'(9)(x-9)\\
&= \sqrt{9}+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot(x-9)\\
&= 3+\frac{x-9}{6}\\
&= \frac{x+9}{6}
\end{aligned}$$

ולכן

$$g(9.2)=\frac{9.2+9}{6}=\frac{18.2}{6}$$

ומכאן $\sqrt{9.2}\simeq\frac{18.2}{6}$.

(ב) נגדיר $f(x)=\sqrt[3]{x}$. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־127, אך שאנו יודעים את השורש השלישי שלה. 125 היא נקודה מוצלחת. כדי למצוא את המשיק ל־f ב־125, נגזור את f:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 125:

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(125)+f'(125)(x-125)\\
&= \sqrt[3]{125}+\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{125}\right)^2}\cdot(x-125)\\
&= 5+\frac{1}{3\cdot5^2}(x-125)\\
&= 5+\frac{x-125}{75}\\
&= \frac{x+250}{75}
\end{aligned}$$

ולכן

$$g\left(127\right)=\frac{127+250}{75}=\frac{377}{75}$$

ומכאן $\sqrt[3]{127}\simeq\frac{377}{75}$.

(ג) נגדיר $f\left(x\right)=\cos x$. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־0.05, אך שאנו יודעים את ה־$\cos$ שלה. 0 היא נקודה מוצלחת. כדי למצוא את המשיק ל־f ב־0, נגזור את f:

$$f'\left(x\right)=-\sin x$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 0:

$$\begin{aligned}g\left(x\right) &= f\left(0\right)+f'\left(0\right)\left(x-0\right)\\ &= \cos 0+\sin 0\cdot x\\ &= \cos 0=1\end{aligned}$$

ולכן

$$g\left(0.05\right)=1$$

ומכאן $\cos\left(0.05\right)\simeq 1$.

(ד) נגדיר $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־65, אך שאנו יודעים את השורש השלישי שלה. 64 היא נקודה מוצלחת. כדי למצוא את המשיק ל־f ב־64, נגזור את f:

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2}}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 64:

$$\begin{aligned}g\left(x\right) &= f\left(64\right)+f'\left(64\right)\left(x-64\right)\\ &= \sqrt[3]{64}+\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{64}\right)^{2}}\cdot\left(x-64\right)\\ &= 4+\frac{1}{3\cdot 4^{2}}\left(x-64\right)\\ &= 4+\frac{x-64}{48}\\ &= \frac{x+128}{48}\end{aligned}$$

ולכן

$$g\left(65\right)=\frac{65+128}{48}=\frac{193}{48}$$

ומכאן $\sqrt[3]{65}\simeq\frac{193}{48}$.

(ה) נגדיר $f(x)=e^x$. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־0.1, אך שאנו יודעים את האקספוננט שלה. 0 היא נקודה מוצלחת. כדי למצוא את המשיק ל־f ב־0, נגזור את f:

$$f'(x)=e^x$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 0:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(0)+f'(0)(x-0) \\ &= e^0+e^0\cdot x \\ &= 1+x \end{aligned}$$

ולכן

$$g(0.1)=1+0.1=1.1$$

ומכאן $e^{0.1}\simeq 1.1$.

(ו) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^{2/3}}$. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־9, אך שאנו יודעים את ה־f שלה. 8 היא נקודה מוצלחת, שכן

$$f(8)=\frac{1}{8^{2/3}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

כדי למצוא את המשיק ל־f ב־8, נגזור את f:

$$f'(x)=\left(x^{-2/3}\right)'=-\frac{2}{3}x^{-5/3}=-\frac{2}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 8:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(8)+f'(8)(x-8) \\ &= \frac{1}{4}-\frac{2}{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}\cdot(x-8) \\ &= \frac{1}{4}-\frac{2}{3\cdot 2^5}(x-8) \\ &= \frac{1}{4}-\frac{x-8}{3\cdot 16} \\ &= \frac{20-x}{48} \end{aligned}$$

ולכן

$$g(9)=\frac{20-9}{48}=\frac{11}{48}$$

ומכאן $\frac{1}{9^{2/3}}\simeq\frac{11}{48}$.

2. הסבירו מדוע ל־x־ים מאד קטנים (מאד קרובים ל־0) מתקיים $\tan x \simeq x$ (כלומר, $\tan x$ מאד דומה ל־x). העזרו בטיעון של קירוב לינארי.

הסבר יהי a מספר מאד קטן (כלומר מאד קרוב ל־0). לצורך הדגמה, אפשר לבחור $a = 0.001$, למשל, אך אפשר גם פשוט להישאר עם a ולזכור שהוא קטן. נסמן $f(x) = \tan x$, ונחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־a, אך שאנו יודעים את ה־tan שלה. 0 היא נקודה מוצלחת, שכן אנו יודעים את $\tan 0$ (שהוא 0). כדי למצוא את המשיק ל־f ב־0, נגזור את f:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 0:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= \tan 0 + \frac{1}{\cos^2 0} \cdot x \\ &= x \end{aligned}$$

ולכן

$$g(a) = a$$

ומכאן $\tan a \simeq a$, כדרוש.

3. תהי f פונקציה המקיימת $f(3) = 5$, וגם

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

מצאו קירוב לינארי ל־$f(3.1)$.

פתרון נשים לב כי אין צורך למצוא את f (לא התבקשנו לעשות זאת). נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־3.1, אך שאנו יודעים את ה־f שלה. 3 היא נקודה מוצלחת (שכן נתון: $f(3) = 5$). כדי למצוא את המשיק ל־f ב־3, נרצה לגזור את f, אך את העבודה הזו כבר עשו בשבילנו. נתון, הרי, כי

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 3:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) \\ &= 5 + \sqrt[3]{3^2 - 1} \cdot (x-3) \\ &= 5 + 2(x-3) \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

ולכן

$$g(3.1) = 2 \cdot 3.1 - 1 = 5.2$$

ומכאן $f(3.1) \simeq 5.2$.

4. ⋆ נניח כי הפונקציה f מקיימת את השוויון הבא לכל x:

$$f'(x) = \frac{1}{1+3xf(x)}$$

בנוסף, נתון כי $f(2) = 4$. נסו להעריך, בעזרת קירוב לינארי, את $f(2.1)$.

הערה דוגמה זו ממחישה את כוחו של הקירוב הלינארי; במקרה זה, למשל, נוכל להעריך את הפונקציה בנקודה מסוימת אף מבלי לדעת מהי הפונקציה באמת!

פתרון נשים לב כי אין צורך למצוא את f (לא התבקשנו לעשות זאת). במקרה זה גם לא בטוח שניתן למצוא את f. נחפש נקודת השקה נוחה. כלומר, נקודה קרובה ל־2.1, אך שאנו יודעים את ה־f שלה. 2 היא נקודה מוצלחת (שכן נתון: $f(2) = 4$). כדי למצוא את המשיק ל־f ב־2, נרצה לגזור את f, אך את העבודה הזו כבר עשו בשבילנו. נתון, הרי, כי

$$f'(x) = \frac{1}{1+3xf(x)}$$

ולכן

$$f'(2) = \frac{1}{1+3\cdot 2\cdot f(2)} = \frac{1}{1+6\cdot 4} = \frac{1}{25}$$

נמצא את המשיק לגרף בנקודה 2:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) \\ &= 4 + \frac{1}{25}\cdot(x-2) \\ &= \frac{x+98}{25} \end{aligned}$$

ולכן

$$g(2.1) = \frac{2.1+98}{25} = \frac{100.1}{25}$$

ומכאן $f(2.1) \simeq \frac{100.1}{25}$.