# תרגיל 17 – בעיות מינימום ומקסימום – הערות

1. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $f\left(x\right)=x^{4}\left(16-x^{4}\right)$, וענו על השאלה: האם יש לה ערך מינימלי?

**פתרון** נגזור כדי למצוא נקודות קיצון.

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= 16x^{4}-x^{8} \\ f'\left(x\right) &= 64x^{3}-8x^{7} \\ &= 8x^{3}\left(8-x^{4}\right) \end{aligned}$$

ולכן $f'\left(x\right)=0$ אם ורק אם $x=0$ או $x^{4}=8$, כלומר $x=\pm\sqrt[4]{8}$. ע"י הצבת ערכים בנגזרת (למשל $-5$, $-1$, $1$ ו־$5$) נגלה שהפונקציה עולה עד $-\sqrt[4]{8}$, יורדת עד $0$, עולה עד $\sqrt[4]{8}$ ויורדת משם והלאה. לכן נקודות המקסימום מתקבלות ב־$-\sqrt[4]{8}$ וב־$\sqrt[4]{8}$. הגובה בשתיהן זהה, מאחר והפונקציה זוגית, והוא:

$$f\left(\sqrt[4]{8}\right)=\left(\sqrt[4]{8}\right)^{4}\left(16-\left(\sqrt[4]{8}\right)^{4}\right)=8\left(16-8\right)=64$$

כלומר הערך המקסימלי הנו $64$. בנקודת המינימום גובה הפונקציה הנו $0$, אך הפונקציה מקבלת גם ערכים שליליים, ולכן אין ערך מינימלי.

2. $\star$ יהיו $a,b>0$ כלשהם. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{x}{ax^{2}+b}$.

**פתרון** נגזור את $f$ כדי למצוא נקודות קיצון:

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(ax^{2}+b\right)-x\cdot 2ax}{\left(ax^{2}+b\right)^{2}}=\frac{b-ax^{2}}{\left(ax^{2}+b\right)^{2}}$$

הנגזרת מתאפסת אם ורק אם $b=ax^{2}$, כלומר

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

אפשר לראות גם שלכל $x<-\sqrt{\frac{b}{a}}$ או $x>\sqrt{\frac{b}{a}}$, הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת, וגם שלכל $-\sqrt{\frac{b}{a}}<x<\sqrt{\frac{b}{a}}$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה. מכאן: ב־$-\sqrt{\frac{b}{a}}$ הפונקציה מקבלת מינימום, וב־$\sqrt{\frac{b}{a}}$ הפונקציה מקבלת מקסימום. כמו כן, אפשר לראות שהפונקציה חיובית על החיוביים ושלילית על השליליים. נבדוק מהו גובהו של המקסימום:

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{2}+b}=\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{2b}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

זהו מקסימום גלובלי, שכן על כל החיוביים הפונקציה נמוכה יותר, ועל כל השליליים היא שלילית. מכאן שהערך המקסימלי של $f$ הנו $\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$.

3. ⋆ מצאו את הערכים המינימליים והערכים המקסימליים של הפונקציה

$$f(x) = 3\sin(2x) + 3\cos(2x)$$

וענו על השאלה: מהי התמונה של הפונקציה?

**פתרון** נגזור כדי למצוא נקודות קיצון.

$$f'(x) = 6\cos(2x) - 6\sin(2x)$$

הנגזרת מתאפסת אם ורק אם

$$\begin{aligned} 6\cos(2x) &= 6\sin(2x) \\ \cos(2x) &= \sin(2x) \end{aligned}$$

כפי שראינו בתרגיל בעבר, הפתרון של משוואה זו הנו

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

כלומר

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$$

חלק מן הנקודות הללו הן מקסימום וחלק מינימום. נציב שתיים ראשונות:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \\ f\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) &= 3\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ולכן הראשונה מקסימום והשניה מינימום. ברור כי $f$ מחזורית (עם מחזור $\pi$) ולכן כל נקודות המינימום והמקסימום הנותרות יהיו באותם הגבהים. מכאן שהערך המקסימלי של הפונקציה הנו $3\sqrt{2}$, והמינימלי $-3\sqrt{2}$.

**4.** נגדיר $f(x) = \left|x^2-9\right| + x$.

(א) מצאו את ערכי המינימום והמקסימום <u>המקומיים</u> (אם קיימים) של הפונקציה $f$.

**פתרון** נפריד את הפונקציה לפי תחומי התנהגות שונים, המובדלים על ידי הנקודות ה"בעייתיות", שהן $\pm 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-9 & x<-3 \\ -x^2+x+9 & -3\le x\le 3 \\ x^2+x-9 & 3<x \end{cases}$$

נגזור (לא בנקודות ההדבקה) –

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<-3 \\ -2x+1 & -3<x<3 \\ 2x+1 & 3<x \end{cases}$$

הנגזרת בקטע הראשון לא מתאפסת (תמיד קטנה מ־$(-5)$). הנגזרת בקטע האמצעי מתאפסת ב־$x=\frac{1}{2}$, ולכן זוהי נקודה חשודה. הנגזרת בקטע השלישי לא מתאפסת (תמיד גדולה מ־7). נחשוד גם בנקודות ההדבקה ($\pm 3$), ונשים הכל בטבלה:

| $x$ | $-5$ | $-3$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

ולכן נקודות המינימום המקומי מתקבלות ב־$\pm 3$, ונקודת המקסימום המקומי מתקבלת ב־$\frac{1}{2}$.

(ב) האם קיימים לה גם ערכי מינימום ומקסימום <u>גלובליים</u>? אם כן – מצאו אותם.

**פתרון** אם יש מקסימום גלובלי, אז הוא גם מקסימום מקומי, ולכן הוא מתקבל ב־$\frac{1}{2}$. הגובה ב־$\frac{1}{2}$ הנו

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9\right| + \frac{1}{2} = 9.25$$

וזה לא ערך מקסימלי, שכן ברור ש־$f(100)$ גבוה יותר. למעשה, קל לראות שהפונקציה שואפת ל־$\infty$ ב־$\infty$.
אם יש מינימום גלובלי, אז הוא גם מינימום מקומי, ולכן הוא מתקבל ב־3 או ב־$(-3)$. מתקיים

$$\begin{aligned} f(-3) &= -3 \\ f(3) &= 3 \end{aligned}$$

ולכן אם יש מקסימום גלובלי הוא מתקבל ב־$(-3)$. אכן, הפונקציה יורדת עד ל־$(-3)$, ובירידה הבאה שלה היא יורדת רק עד 3, ולכן $-3$ הנו מינימום גלובלי (קל לראות זאת בשרטוט).

(ג) מהי <u>התמונה</u> של הפונקציה?

**פתרון** מהסעיפים הקודמים נובע כי $\mathrm{Im} f = [-3,\infty)$.

5. נגדיר $f(x) = \arctan(1-x)$.

(א) האם יש ל־$f$ מקסימום גלובלי? האם יש לה מינימום גלובלי? אם כן – מצאו אותם.

**פתרון** נגזור את $f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1+(1-x)^2} \\ &= \frac{-1}{2-2x+x^2} \end{aligned}$$

ונגזרת זו אינה מתאפסת, ולכן אין נקודות מינימום ומקסימום מקומיות, וגם לא גלובליות.

(ב) האם $f$ חסומה?

**פתרון** כן. ידוע כי $\arctan$ (של כל ביטוי) חסומה בין $-\frac{\pi}{2}$ ל־$\frac{\pi}{2}$.

(ג) מהי התמונה של $f$?

**פתרון** נשים לב כי מסעיף (א) נובע כי $f$ מונוטונית (יורדת). לכן מספיק לראות מהם הערכים שהיא מקבלת ב"קצוות", כלומר ב־$\pm\infty$. מתקיים:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \arctan(1-x) &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x\to\infty} \arctan(1-x) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ולכן התמונה הנה $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6. נגדיר $f(x) = \arctan\left(x^2-1\right)$.

(א) האם יש ל־$f$ מקסימום גלובלי? האם יש לה מינימום גלובלי? אם כן – מצאו אותם.

**פתרון** נגזור את $f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x}{2-2x^2+x^4} \end{aligned}$$

הנגזרת מתאפסת רק ב־$0$, ולכן $0$ חשודה בקיצון. כמו כן, מאחר והמכנה תמיד חיובי, הנגזרת שלילית בדיוק כאשר $x$ שלילי. מכאן שהפונקציה יורדת עד ל־$0$ ועולה מ־$0$, ולכן $0$ הנה נקודת מינימום יחידה וגלובלית (ואין נקודות מקסימום גלובליות).

(ב) האם $f$ חסומה?

**פתרון** ראו סעיף (ב) בשאלה הקודמת.

(ג) מהי ה<u>תמונה</u> של $f$?

**פתרון** מסעיף (א) נובע כי הפונקציה מונוטונית על החיוביים. כמו כן, קל לוודא שהיא זוגית. לכן מספיק לברר מהי תמונתה על האי־שליליים, וזאת ניתן לוודא על ידי בדיקת ה"קצוות", שהם $0$ ו־$\infty$. מתקיים:

$$\begin{aligned} f(0) &= \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \arctan\left(x^2-1\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ולכן התמונה הנה $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. סוחר שכר אנייה להעברת סחורה מנמל $A$ לנמל $B$. המרחק בין שני הנמלים הללו הוא $120$ ק"מ. ידוע כי האנייה נעה במהירות קבועה של $v$ קמ"ש. עבור כל שעת הפלגה, על הסוחר לשלם לאנשי צוותו משכורת של $15$ שקלים חדשים לכל איש צוות; כמו־כן, בסיום ההפלגה, עליו לשלם לכל איש צוות בונוס <u>נוסף</u> של $2v$ ש"ח.

(א) מצאו כמה ישלם הסוחר, בשקלים חדשים, לכל אחד מאנשי הצוות של האנייה, כפונקציה של מהירות האנייה.

(ב) באיזו מהירות עליו להפליג כדי שהוצאותיו יהיו <u>מינימליות</u>?

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: לנו מותר לשחק כאן עם המהירות. נסמנה ב־$v$.

**שלב ב'** תחום הגדרה: המהירות יכולה להיות כל מספר חיובי. כלומר: $v \in (0,\infty)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למזער: פונקציית העלות. נסמנה ב־$f(v)$. מאחר והעלות תלויה בזמן, נמצא קודם כל את משך הזמן $t$ של ההפלגה. לפי הנוסחה הידועה "זמן X מהירות = מרחק", נקבל $vt = 120$, כלומר $t = \frac{120}{v}$. הסוחר יצטרך לשלם לכל איש צוות, אם כך, $15 \cdot \frac{120}{v}$, כלומר $\frac{1800}{v}$, בנוסף לבונוס של $2v$, בשקלים חדשים. סה"כ הוא יצטרך לשלם לכל עובד

$$f(v) = \frac{1800}{v} + 2v$$

שקלים חדשים.

**שלב ד'** מזעור הפונקציה: נרצה להביא את הפונקציה הזו למינימום. מתקיים:

$$f'(v) = -\frac{1800}{v^2} + 2$$

לכן, הנגזרת שווה ל־$0$ כאשר $\frac{1800}{v^2} = 2$, כלומר כאשר $v^2 = 900$, ומכיוון שהמהירות היא חיובית, נקבל $v = 30$.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מינימום של $f$: אפשר לראות כי אם $v < 30$ אז $f'(v) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת, ואם $v > 30$ אז $f'(v) > 0$ ולכן הפונקציה עולה, וכך נסיק כי $30$ קמ"ש זוהי המהירות עבורה הוצאות הסוחר יהיו מינימליות.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: $30$ קמ"ש נשמעת כמו מהירות הגיונית.

8. מבין כל המלבנים ששטחם $S$, איזה מלבן הוא בעל ההיקף הקטן ביותר?

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: נסמן שתי צלעות סמוכות של המלבן ב־$a, b$. אך אנו מעוניינים במשתנה יחיד; ע"פ הנתון, $ab = S$, ולכן נוכל לסמן $b = \frac{S}{a}$, ונוכל לומר שצלעות המלבן הסמוכות הן $a$ ו־$\frac{S}{a}$, וכך יהיה לנו משתנה יחיד ($a$).

**שלב ב'** תחום הגדרה: $a$ מוכרחת להיות חיובית, אך אין הגבלה על גודלה. לכן $a \in (0, \infty)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למזער: נגדיר את פונקציית ההיקף של המלבן כפונקצייה של $a$:

$$f(a) = a + \frac{S}{a} + a + \frac{S}{a} = 2\left(a + \frac{S}{a}\right)$$

**שלב ד'** מזעור הפונקציה: גזירה מראה – $f'(a) = 2\left(1 - \frac{S}{a^2}\right)$. הנגזרת מתאפסת כאשר $\frac{S}{a^2} = 1$, כלומר כאשר $a^2 = S$, ומכיוון ש־$a$ חיובי זה מתקיים כאשר $a = \sqrt{S}$. במקרה זה, $b = \frac{S}{a} = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S} = a$, כלומר, המלבן הוא ריבוע.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מינימום של $f$: אכן, אם $a < \sqrt{S}$ אפשר לראות כי $f'(a) < 0$, ולכן הפונקציה יורדת, ואם $a > \sqrt{S}$ אפשר לראות כי $f'(a) > 0$, ולכן הפונקציה עולה, ולכן בנקודה $\sqrt{S}$ הפונקציה אכן מקבלת מינימום. נסיק מכך שהמלבן בעל ההיקף הקטן ביותר ששטחו $S$ הוא הריבוע ששטחו $S$.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: אין שום בעיה עם ריבוע שצלעו $\sqrt{S}$.

9. הציגו את המספר 18 כסכום של שני מספרים חיוביים שסכום ריבועיהם מינימלי.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: יהי $x$ אחד משני המספרים הללו. נוכל לרשום את המספר השני בתור $18 - x$, וכך להבטיח משתנה יחיד.

**שלב ב'** תחום הגדרה: $0 < x < 18$ (כדי ששני המספרים יהיו חיוביים).

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למזער: נגדיר את $f$ להיות פונקציית הסכום של ריבועי שני המספרים. כלומר: $f(x) = x^2 + (18 - x)^2$.

**שלב ד'** מזעור הפונקציה: נגזור –

$$f'(x) = 2x - 2(18 - x) = 4x - 36$$

נגזרת זו מתאפסת כאשר $4x = 36$, כלומר כאשר $x = 9$.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מינימום של $f$: $f''(x) = 4$, ולכן $f''(9) > 0$, ולכן זו אכן נקודת מינימום. כלומר, זוג המספרים החיוביים שסכומם 18 וסכום ריבועיהם מינימלי, הם המספרים 9 ו־9.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: 9 ו־9 הם באמת מספרים חיוביים שסכומם 18. הכל טוב ויפה.

10. מבין כל שלישיות המספרים החיוביים שסכומם 24 עבורן המספר הראשון גדול פי 3 מהמספר השני, מצאו את השלישייה בעלת המכפלה ה<u>מקסימלית</u>.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: יהי $x$ אחד משני המספרים הללו. נוכל לרשום את המספר השני בתור $3x$ ואת המספר השלישי בתור $24-x-3x$, כלומר $24-4x$, וכך להבטיח משתנה יחיד.

**שלב ב'** תחום הגדרה: $0<x<6$ (כדי ששלושת המספרים יהיו חיוביים).

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: המפכלה נתונה ע"י

$$f(x)=x\cdot 3x\cdot(24-4x)=72x^2-12x^3$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$f'(x)=144x-36x^2$$

לפי תחום ההגדרה, $x\neq 0$. נחפש נקודה אחרת עבורה הנגזרת מתאפסת:

$$\begin{aligned}144x-36x^2&=0\\144-36x&=0\\4-x&=0\\x&=4\end{aligned}$$

ולכן 4 חשודה בקיצון.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $f$: אפשר לודא בקלות שהנגזרת השנייה ב־4 שלילית. לכן השלישייה הממקסמת היא $4,8,12$.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: כל המספרים הללו אכן חיוביים, וסכומם הוא אכן 24. הכל כשורה.

11. מבין כל שלישיות המספרים החיוביים שסכומם 9 ושניים מהם שווים זה לזה, מצאו את השלישייה בעלת המכפלה ה<u>מקסימלית</u>.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: יהי $x$ אחד משני המספרים הללו. נוכל לרשום את המספר השני (זה ששווה לו) בתור $x$ ואת המספר השלישי בתור $9-x-x$, כלומר $9-2x$, וכך להבטיח משתנה יחיד.

**שלב ב'** תחום הגדרה: $0<x<4.5$ (כדי ששלושת המספרים יהיו חיוביים).

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: המפכלה נתונה ע"י

$$f(x)=x\cdot x\cdot(9-2x)=9x^2-2x^3$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$f'(x) = 18x - 6x^2$$

לפי תחום ההגדרה, $x \neq 0$. נחפש נקודה אחרת עבורה הנגזרת מתאפסת:

$$\begin{aligned} 18x - 6x^2 &= 0 \\ 18 - 6x &= 0 \\ 3 - x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

ולכן 3 חשודה בקיצון.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $f$: אפשר לודא בקלות שהנגזרת השנייה ב־3 שלילית. לכן השלישייה הממקסמת היא $3,3,3$.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: כל המספרים הללו אכן חיוביים, וסכומם הוא אכן 9. אין בעיות.

12. חברה ליצור שנאים מכרה בחודש שעבר 500 יחידות במחיר של 80 ש"ח כל אחת. ידוע כי עבור כל הפחתה של 4 ש"ח במחיר המוצר, תמכור החברה בחודש הקרוב 50 יחידות נוספות (בנוסף ל־500 הללו). בכמה כסף כדאי לחברה למכור את השנאים בחודש הקרוב, כדי ל<u>מקסם</u> את הכנסותיה מהמכירה?

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: נסמן ב־$x$ את כמות ההפחתות של 4 ש"ח מן המחיר – זה הרי המשתנה שאנחנו משחקים איתו כאן. (הערה: יכולנו לבחור גם פשוט את כמות השקלים שאנו מפחיתים)

**שלב ב'** תחום הגדרה: $x$ שייך לקבוצת המספרים ה<u>שלמים</u> בקטע $[0,20]$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: פונקציית ההכנסות. כדי למצוא את ההכנסות, עלינו לברר כמה שנאים החברה תמכור, ומה יהיה מחירו של כל אחד: כמות השנאים שהחברה תמכור היא $500 + 50x$, ומחיר כל אחד מהם יהיה $80 - 4x$. על־כן, פונקציית ההכנסות תיראה כך:

$$\begin{aligned} I(x) &= (500 + 50x)(80 - 4x) = 40000 - 2000x + 4000x - 200x^2 \\ &= 40000 + 2000x - 200x^2 \end{aligned}$$

זוהי בעצם פרבולה עצובה.

**שלב ד'** מקסום הפונקציה: נגזור אותה כדי למצוא את נקודת המקסימום שלה –

$$\begin{aligned} I'(x) &= 2000 - 400x \\ I'(x) &= 0 \\ 2000 - 400x &= 0 \\ 2000 &= 400x \\ 5 &= x \end{aligned}$$

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $I$: אנו יודעים שזו פרבולה עצובה. לכן, עבור $x = 5$ יתקבלו ההכנסות המקסימליות.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: יש להיזהר כאן, ולהיזכר מה שאלות אותנו: המחיר (זה מה ששאלו אותנו אודותיו) יהיה 60 ש"ח ($80 - 4 \cdot 5$).

13. מצאו את ממדיה של תיבה בעלת נפח מקסימלי, כאשר נתון ששטח הפנים שלה הוא 200 סמ"ר, ואורך בסיסה גדול פי 3 מרוחבו.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: נסמן ב־$x$ את רוחב בסיסה של התיבה. נקבל שאורך בסיסה הוא $3x$. נסמן ב־$h$ את גובהה. כדי להיפטר מהמשתנה המיותר, נעזר בנתון, על פיו מתקיים

$$\begin{aligned}
2\left(x \cdot 3x + 3x \cdot h + h \cdot x\right) &= 200 \\
3x^2 + 4xh &= 100 \\
4xh &= 100 - 3x^2 \\
h &= \frac{100 - 3x^2}{4x}
\end{aligned}$$

**שלב ב'** תחום הגדרה: ברור כי $x$ חיובי. כדי לא לקבל גובה שלילי, נדרוש גם $3x^2 < 100$, כלומר $x^2 < \frac{100}{3}$, וזה יתן לנו $x \in \left(0, \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: פונקציית הנפח, שהנה

$$v\left(x\right) = x \cdot 3x \cdot h = 3x^2 \cdot \frac{100 - 3x^2}{4x} = \frac{3}{4}x\left(100 - 3x^2\right) = 75x - \frac{9}{4}x^3$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$v'\left(x\right) = 75 - \frac{27}{4}x^2$$

נשווה ל־0:

$$\begin{aligned}
75 - \frac{27}{4}x^2 &= 0 \\
75 &= \frac{27}{4}x^2 \\
x^2 &= \frac{300}{27} = \frac{100}{9} \\
x &= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $v$: נגזור פעם נוספת –

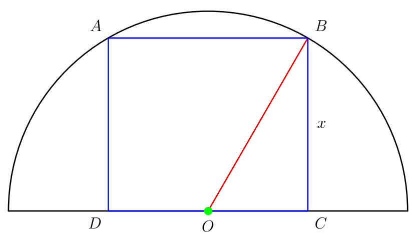
$$\begin{aligned} v''(x) &= -\frac{27}{2}x \\ v''\left(\frac{10}{3}\right) &= -\frac{27}{2}\cdot\frac{10}{3} < 0 \end{aligned}$$

ולכן זוהי אכן נקודת מקסימום. כלומר, כדי לקבל נפח מקסימלי, נבנה תיבה שרוחב בסיסה $\frac{10}{3}$, אורך בסיסה 10, וגובהה

$$h = \frac{100-3x^2}{4x} = \frac{100-3\cdot\frac{100}{9}}{\frac{40}{3}} = \frac{\frac{300}{3}-\frac{100}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{200}{40} = 5$$

**שלב ו'** בדיקת שפיות: $x$ שמצאנו נמצא באמת בתחום ההגדרה שמצאנו קודם לכן. הגובה נשמע אפשרי בהחלט.

14. בחצי עיגול שרדיוסו $10\sqrt{2}$ חסום מלבן $ABCD$ כמשורטט בציור. מרכז העיגול הוא $O$. נסמן את אורך הצלע $BC$ ב־$x$.




(א) מצאו את ערכו של $x$ עבורו <u>שטח</u> המלבן מקסימלי.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: נביט במשולש $OBC$. הצלע $OB$ היא רדיוס המעגל, ועל־כן אורכה $10\sqrt{2}$. נסמן את אורך הצלע $OC$ ב־$y$. אנו לא רוצים משתנה מיותר, ולכן ננסה לבטא את $y$ באמצעות $x$. לפי משפט פיתגורס, נוכל לחשב אותו:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \left(10\sqrt{2}\right)^2 \\ y^2 &= 200-x^2 \\ y &= \sqrt{200-x^2} \end{aligned}$$

ולכן אורך הצלע $DC$ הוא $2\sqrt{200-x^2}$.

**שלב ב'** תחום הגדרה: $x$ מוכרח להיות חיובי, ולא יכול להיות גדול מהרדיוס. כלומר: $x \in \left(0, 10\sqrt{2}\right)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: שטח המלבן הנו

$$f(x) = 2\sqrt{200-x^2}\cdot x$$

**שלב ד'** מקסום הפונקציה: נגזור –

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{200-x^2}+x\cdot\frac{2}{2\sqrt{200-x^2}}\cdot(-2x) \\ &= 2\sqrt{200-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{200-x^2}} \end{aligned}$$

נשווה את הנגזרת ל־0:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{200-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{200-x^2}} &= 0 \\ 2\sqrt{200-x^2} &= \frac{2x^2}{\sqrt{200-x^2}} \\ 2\left(200-x^2\right) &= 2x^2 \\ 400-2x^2 &= 2x^2 \\ 400 &= 4x^2 \\ 100 &= x^2 \\ 10 &= x \end{aligned}$$

לכן $x=10$ היא נקודה חשודה לקיצון.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $f$: נגזור פעם נוספת:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{2\sqrt{200-x^2}}\cdot(-2x)-\frac{4x\sqrt{200-x^2}-2x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{200-x^2}}\cdot(-2x)\right)}{200-x^2} \\ f''(10) &= \frac{2}{2\sqrt{200-100}}\cdot(-20)-\frac{40\sqrt{200-100}-200\left(\frac{1}{2\sqrt{200-100}}\cdot(-20)\right)}{200-100} \\ &= \frac{-20}{10}-\frac{40\cdot10-200\left(\frac{-20}{20}\right)}{100}=-2-\frac{600}{100}=-8<0 \end{aligned}$$

ולכן זוהי אכן נקודת מקסימום. לכן, נקבל שטח מקסימלי עבור $x=10$.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: מסתדר עם השרטוט.

(ב) מצאו את ערכו של $x$ עבורו <u>היקף</u> המלבן מקסימלי.

**פתרון** שלבים א' ו־ב' נותרו כפי שהיו בסעיף הקודם.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: פונקציית ההיקף הנה

$$g(x)=2\left(x+2\sqrt{200-x^2}\right)$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$g'(x) = 2\left(1 + \frac{2}{2\sqrt{200 - x^2}} \cdot (-2x)\right)$$

נשווה ל־0:

$$\begin{aligned} 2\left(1 + \frac{2}{2\sqrt{200 - x^2}} \cdot (-2x)\right) &= 0 \\ 1 + \frac{2}{2\sqrt{200 - x^2}} \cdot (-2x) &= 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{200 - x^2}} &= 1 \\ 2x &= \sqrt{200 - x^2} \\ 4x^2 &= 200 - x^2 \\ 5x^2 &= 200 \\ x^2 &= 40 \\ x &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

לכן $x = 2\sqrt{10}$ חשודה כקיצון.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $g$. נציב את 6, נקודה קטנה מ־$2\sqrt{10}$, בנגזרת, ונקבל מספר חיובי, ולכן הפונקציה עולה עד $2\sqrt{10}$. נציב את 10, נקודה גדולה מ־$2\sqrt{10}$, בנגזרת, ונקבל מספר שלילי, ולכן הפונקציה יורדת מ־$2\sqrt{10}$; מכאן, זוהי אכן נקודת מקסימום.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: מסתדר עם הציור.

15. מצאו את ממדיה של תיבה פתוחה (ללא מכסה עליון) בעלת נפח מקסימלי, כאשר נתון ששטח הפנים שלה הוא 300 סמ"ר (ללא מכסה) ואורך בסיסה גדול פי 4 מרוחבו.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: נסמן ב־$x$ את רוחב בסיסה של התיבה. נקבל שאורך בסיסה הוא $4x$. נסמן ב־$h$ את גובהה. כדי להיפטר מהמשתנה המיותר, נעזר בנתון, על פיו מתקיים

$$\begin{aligned} x \cdot 4x + 2(4x \cdot h + h \cdot x) &= 300 \\ 4x^2 + 10xh &= 300 \\ 10xh &= 300 - 4x^2 \\ h &= \frac{300 - 4x^2}{10x} \end{aligned}$$

**שלב ב'** תחום הגדרה: ברור כי $x$ חיובי. כדי לא לקבל גובה שלילי, נדרוש גם $4x^2 < 300$, כלומר $x^2 < 75$, וזה יתן לנו $x \in \left(0, \sqrt{75}\right)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: פונקציית הנפח, שהנה

$$v\left(x\right)=x\cdot4x\cdot h=4x^{2}\cdot\frac{300-4x^{2}}{10x}=\frac{1200x-16x^{3}}{10}=120x-\frac{8}{5}x^{3}$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$v'\left(x\right)=120-\frac{24}{5}x^{2}$$

נשווה ל־0:

$$\begin{aligned}120-\frac{24}{5}x^{2} & = 0\\ 120 & = \frac{24}{5}x^{2}\\ x^{2} & = \frac{600}{24}=25\\ x & = 5\end{aligned}$$

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $v$: נגזור פעם נוספת –

$$\begin{aligned}v''\left(x\right) & = -\frac{48}{5}x\\ v''\left(5\right) & = -48<0\end{aligned}$$

ולכן זוהי אכן נקודת מקסימום. כלומר, כדי לקבל נפח מקסימלי, נבנה תיבה שרוחב בסיסה 5, אורך בסיסה 20, וגובהה

$$h=\frac{300-4x^{2}}{10x}=\frac{300-4\cdot25}{50}=\frac{200}{50}=4$$

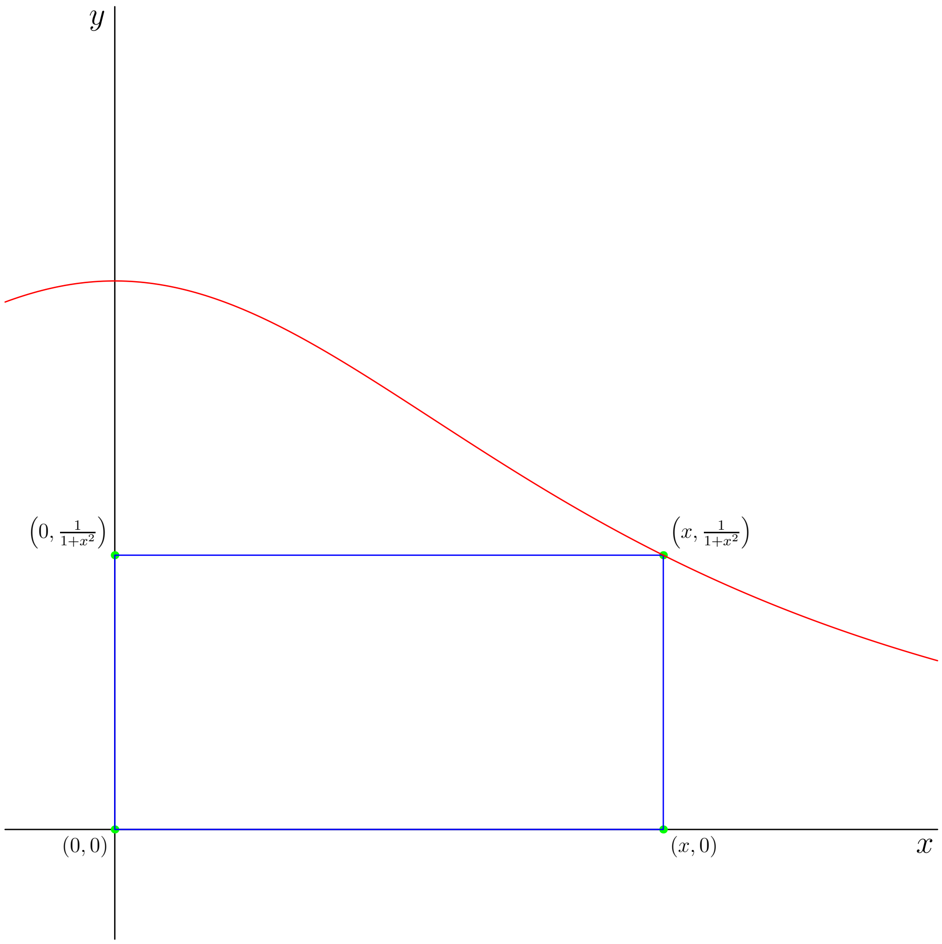
**שלב ו'** בדיקת שפיות: $x$ שמצאנו נמצא באמת בתחום ההגדרה שמצאנו קודם לכן. הגובה נשמע אפשרי בהחלט.

16. בונים מלבן ברביע הראשון (על מערכת הצירים, כאשר $x, y \geq 0$) כך שקודקוד אחד נמצא בראשית הצירים, שני קודקודים נוספים נמצאים על הצירים, והקודקוד הרביעי נמצא על גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(א) האם קיים מלבן בעל שטח <u>מקסימלי</u>? אם כן, מצאו את ממדיו.

(ב) האם קיים מלבן בעל שטח <u>מינימלי</u>? אם כן, מצאו את ממדיו.

**פתרון** ראשית, לפני כל שאר השלבים, נשרטט:




**שלב א'** מציאת משתנה: בחרנו את $x$ שסימנו בציור להיות המשתנה. $x$ יוצא גם אחת מצלעות המלבן.

**שלב ב'** תחום הגדרה: מובן ש־$x$ חיובי. $x$ יכול להיות גם גדול כרצוננו, שכן הפונקציה (שמשורטטת באדום) לעולם לא תתאפס. כלומר: $x \in (0, \infty)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם או למזער: פונקצית השטח, הלא היא

$$s(x) = x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$$

**שלב ד'** מיקסום או מזעור הפונקציה: נגזור –

$$s'(x) = \frac{\left(1+x^2\right) - x\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

הנגזרת שווה ל־$0$ כאשר המונה שווה ל־$0$, כלומר כאשר

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

(נשים לב כי תחום ההגדרה שלנו הוא $x>0$). לכן $1$ חשודה כקיצון.

**שלב ה'** סיווג נקודת הקיצון: נגזור פעם נוספת –

$$\begin{aligned} s''(x) &= \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - 2\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} \\ &= \frac{-2x\left(1+x^2\right) - 4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} \\ &= \frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} \\ s''(1) &= \frac{2-6}{2^3} < 0 \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו מקסימום. נשים לב כי אין נקודות קיצון אחרות, ולכן <u>אין מינימום</u>!

**שלב ו'** בדיקת שפיות: המקסימום מתקבל כאשר $x=1$. במקרה זה שתיים מצלעות המלבן יהיו באורך $1$, והשתיים האחרות באורך $\frac{1}{2}$. זה נראה בסדר.

17. מבין כל המשולשים ישרי הזווית שבהם סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה 6 ס"מ, מצאו את המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: אנחנו משחקים בממדי המשולש, כלומר באורכי הניצבים והיתר. אך אנו מעוניינים במשתנה אחד בלבד. נסמן, לדוגמה, את היתר ב־$x$, וננסה לבטא את שאר הצלעות באמצעות $x$. אחד הניצבים יהיה, לכן, באורך $6-x$ (שכן סכום אורכי היתר וניצב זה הנו 6 ס"מ), וכדי למצוא את הניצב השני, נשתמש במשפט פיתגורס. אורכו יהיה

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+(6-x)^2} &= \sqrt{x^2-(36-12x+x^2)}\\ &= \sqrt{12x-36}\end{aligned}$$

**שלב ב'** תחום הגדרה: מובן ש־$x$ מוכרח להיות חיובי. כמו כן, כדי שגם הניצב הראשון יהיה חיובי, צריך להתקיים $6-x>0$, כלומר $x<6$. בשביל שגם הניצב השני יהיה באורך הגיוני, צריך להתקיים $12x-36>0$, כלומר $x>3$. לכן תחום ההגדרה הנו $(3,6)$ (יכולנו להסיק זאת גם בדרך שונה – סכום היתר והניצב הראשון הנו 6, אך מובן שהיתר ארוך יותר, ולכן היתר ארוך מ־3).

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: פונקצית השטח, שהנה

$$s(x)=\frac{(6-x)\sqrt{12x-36}}{2}$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$s'(x)=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{12x-36}+\frac{6-x}{2\sqrt{12x-36}}\cdot 12\right]$$

נשווה ל־0:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[-\sqrt{12x-36}+\frac{6-x}{2\sqrt{12x-36}}\cdot 12\right] &= 0\\ \frac{6(6-x)}{\sqrt{12x-36}} &= \sqrt{12x-36}\\ 6(6-x) &= 12x-36\\ x &= 4\end{aligned}$$

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום של $s$: ניתן להציב בנגזרת נקודות מימין ומשמאל ל־4 בשביל לראות שעד 4 הפונקציה עולה ומ־4 היא יורדת. לכן זוהי נקודת מקסימום.

**שלב ו'** נקבל כי אורכי הצלעות של המשולש בעל השטח המקסימלי הם 4 (היתר), 2 (אחד הניצבים) ו־$\sqrt{12\cdot 4-36}=2\sqrt{3}$ (הניצב השני). פיתגורס עובד, היתר הכי ארוך. הכל בסדר.

18. ידוע כי סכום קוטרו וגובהו של חרוט הוא 7 ס"מ. מהם מימדיו, אם ידוע כי נפחו מקסימלי?

**פתרון**

**שלב א'** מציאת משתנה: נסמן את הרדיוס של החרוט ב־$r$ ואת גובהו ב־$h$. אנו מעוניינים במשתנה יחיד, ולכן נעזר בנתון כדי לבטא את $h$ באמצעות $r$. נקבל:

$$2r + h = 7$$

(מאחר וקוטר הנו פעמיים הרדיוס!). כלומר $h = 7 - 2r$.

**שלב ב'** תחום הגדרה: הקוטר חיובי, כמובן, אך גם קטן מ־7, כדי שגם הגובה יהיה חיובי. לכן $r \in (0, 3.5)$.

**שלב ג'** הפונקציה שאנו מעוניינים למקסם: פונקציית הנפח של החרוט –

$$v(r) = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 (7 - 2r)}{3}$$

**שלב ד'** מיקסום הפונקציה: נגזור –

$$v'(r) = \frac{\pi}{3}\left(2r(7-2r) - 2r^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(14r - 6r^2\right)$$

נשווה ל־0:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}\left(14r - 6r^2\right) &= 0 \\ 14r &= 6r^2 \\ 14 &= 6r \\ r &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

ולכן $r = \frac{7}{3}$ חשודה כקיצון.

**שלב ה'** וידוא שזוהי אכן נקודת מקסימום: נגזור פעם נוספת –

$$\begin{aligned} v''(r) &= \frac{\pi}{3}(14 - 12r) \\ v''\left(\frac{7}{3}\right) &= \frac{\pi}{3}\left(14 - \frac{12 \cdot 7}{3}\right) < 0 \end{aligned}$$

ולכן זוהי נקודת מקסימום.

**שלב ו'** בדיקת שפיות: קיבלנו חרוט שרדיוסו $\frac{7}{3}$, ולכן קוטרו $\frac{14}{3}$, ולכן גובהו $7 - \frac{14}{3}$, כלומר $\frac{7}{3}$ (הכל בסנטימטרים). הכל חיובי ונחמד.