

## תרגיל 3 – ערך מוחלט – הערות

$$1. \text{ הוכיחו כי לכל } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0, \text{ מתקיים } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

**רמז:** ניתן לפרק ל-4 מקרים שונים, ולראות שבכל אחד מהם זה מתקיים.

מקרה לדוגמה:  $x \geq 0$  ו- $y < 0$ . במקרה זה,  $\frac{x}{y}$  אי-חיובי, ולכן

$$\left| \frac{x}{y} \right| = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y} = \frac{|x|}{|y|}$$

ובאופן דומה פותרים את שאר המקרים (מקרה:  $x \geq 0$  ו- $y > 0$ ; מקרה:  $x < 0$  ו- $y > 0$ ; מקרה:  $x < 0$  ו- $y < 0$ ).

$$2. \text{ מהי קבוצת ה-} x \text{ ה-} |x-5| + 5 < 5 \text{ המקיימים?}$$

הקבוצה ריקה, כמובן!

3. בהנתן אי-שוויון המשולש בגרסתו הנוכחית:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

הוכיחו את אי-שוויון המשולש בגרסתו הבאה:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

**רמז:** זה יותר קל ממה שזה נראה.

נציב בנוסחה הראשונה במקום  $x$  את הביטוי  $(x - y)$  ובמקום  $y$  את הביטוי  $(y - z)$ . נקבל:

$$\begin{aligned} |(x - y) + (y - z)| &\leq |x - y| + |y - z| \\ |x - z| &\leq |x - y| + |y - z| \end{aligned}$$

כדרוש.

$$4. \text{ הוכיחו כי לכל } x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \geq |x| - |y|.$$

נציב בנוסחה הראשונה במקום  $x$  את הביטוי  $(x - y)$  ובמקום  $y$  את הביטוי  $y$ . נקבל:

$$|(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

כדרוש.

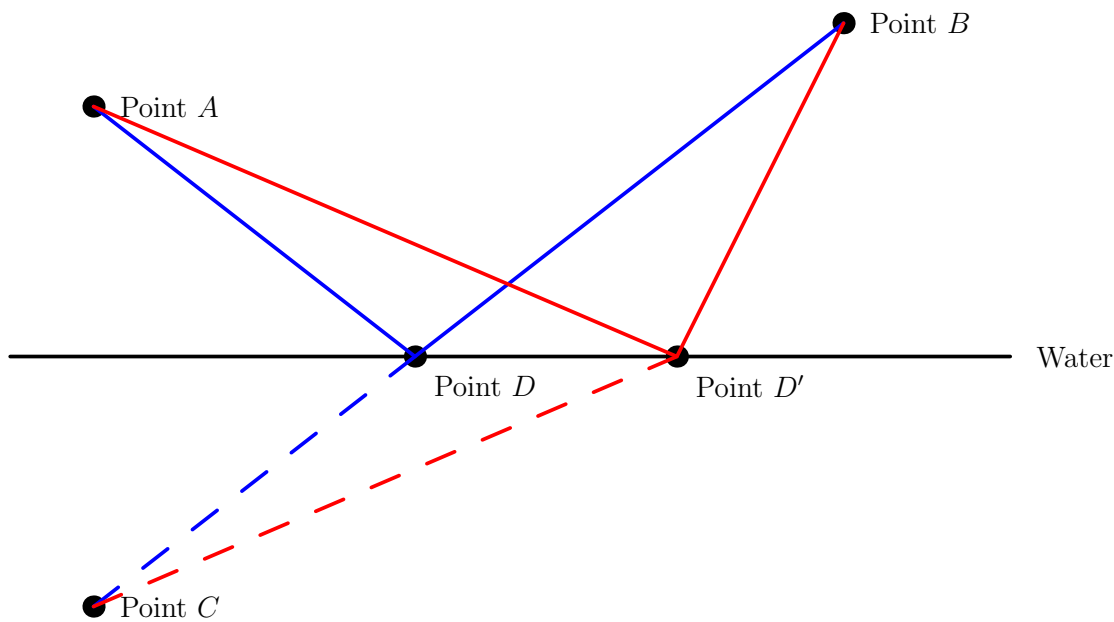
5. \* הביטו בשרטוט הבא:

● Point B

● Point A

Water  
 המשימה: למצוא את המסלול הכי קצר מנקודה A אל קו המים וחזרה אל נקודה B, ולהצליח להוכיח שזו אכן הדרך הכי קצרה.

**פתרון** ראשית נסמן נקודה חדשה, C, שהיא תמונת המראה של A מצידו השני של קו המים. נשים לב, כי הדרך הכי קצרה מ-C ל-B דרך המים היא פשוט הקו הישר המחבר ביניהן. נסמן את נקודת החיתוך של הישר הנ"ל ב-D, ונטען כי המסלול מ-A ל-B דרך D הנו הקצר ביותר ביניהן העובר דרך המים. נצבע את המסלול הנ"ל בצבע כחול, ונביט במסלול אחר כלשהו (אותו נסמן באדום), ונוכיח, באמצעות אי-שוויון המשולש, שהמסלול האדום ארוך יותר.



המסלול הכחול שווה באורכו לקו הישר המחבר את C ל-B. המסלול האדום שווה למסלול בין C ל-B העובר דרך הנקודה D'. לפי אי-שוויון המשולש (במשולש BCD'), הקו הישר בין C ל-B קצר יותר - ועל-כן המסלול הכחול קצר יותר, וזה מה שביקשנו להוכיח!

**שרטוט**

נסו להתאים את הגרפים לפונקציות המתאימות להם. לכל גרף מתאימה אך ורק פונקציה אחת. פונקציות אפשריות:

$$x^2, x^2 + 1, x^2 - 1, -|x|, 2x, -\frac{x}{2}, -(x+1)^2, 3, x^2 - (x-1)^2, 3x - x^2 - 2$$

פונקציה	גרף	פונקציה	גרף
$- x $		$x^2$	
$-(x+1)^2$		$2x$	
$x^2 - 1$		$3$	
$-\frac{x}{2}$		$x^2 - (x-1)^2$	
$3x - x^2 - 2$		$x^2 + 1$	