תרגיל 4 – אי שוויונות – הערות

1. פתרו את מערכות האי־שוויונות הבאות. אם התשובה היא קטע, רשמו אותה ככזו.

(א) $\begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$ **(ב)** $\begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$ **(ג)** $\begin{cases} x < 2x \\ x \leq 1 \end{cases}$

(ד) $\begin{cases} \frac{x-5}{5} < \frac{x-3}{3} \\ \frac{x-5}{3} > \frac{x-3}{5} \end{cases}$ **(ה)** $\begin{cases} \frac{x-2}{2} \leq \frac{x-7}{7} \\ \frac{x-3}{3} \geq \frac{x-8}{8} \end{cases}$ **(ו)** $\begin{cases} x < -x \\ -x \geq -(2x+1) \end{cases}$

(ז) $\begin{cases} x \leq x \\ 10x \leq -10 \end{cases}$ **(ח)** $\begin{cases} 2x > 10 \\ 3x = 18 \end{cases}$ **(ט)** $\begin{cases} x > 63 \\ x < x \end{cases}$

פתרונות חלקיים

(ה) נכפול את האי־שוויון הראשון ב־14 ונקבל:

$$\begin{aligned} 7x-14 &\leq 2x-14 \\ 5x &\leq 0 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

ואת השני נכפול ב־24 ונקבל:

$$\begin{aligned} 8x-24 &\geq 3x-24 \\ 5x &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

ולכן $x \leq 0$ וגם $x \geq 0$ ־ מסקנה: $x = 0$.

(ו) האי־שוויון $x < -x$ פירושו: "x שלילי" (למה?). אי־השוויון השני נותן לאחר פתיחת סוגריים:

$$\begin{aligned} -x &\geq -2x-1 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא $-1 \leq x < 0$, כלומר $[-1, 0)$.

(ח) מהשוויון השני נסיק $x = 6$, ומהאי־שוויון נסיק $x > 5$. לכן, $x = 6$ וגם $x > 5$. לכן התשובה הסופית הנה $x = 6$.

(ט) הפתרון הוא, כמובן, הקבוצה הריקה.

2. פתרו את אי־השוויונות הבאים. אם התשובה היא קטע, רשמו אותה ככזו.

(א) $|x-5|<3$ **(ב)** $|x-5|<-1$ **(ג)** $3\,|7-x|<21$
(ד) $|2-2x|\geq\frac{3}{2}$ **(ה)** $\left|\frac{3+x}{2}\right|>\frac{7}{3}$ **(ו)** $|19x-37|+1\geq 0$
(ז) $100\,|x|>0$ **(ח)** $|x-1|+|x-2|>3$ **(ט)** $|x+1|+|x+2|<3$
(י) $|x-2|\geq|x-1|$ **(יא)** $|x-3|>|3-x|$ **(יב)** $\star$ $|x-1|-|x-2|+|x-3|<6$

פתרונות חלקיים

(ג) נחלק ב־3 ונקבל $|7-x|<7$, ולכן $-7<7-x<7$, והפחתת 7 מכל האגפים תתן $-14<-x<0$, וכפל ב־-1 עם שינוי כיוון האי־שוויון ייתן $0<x<14$, והפתרון הוא $(0,14)$.

(ה) כדאי קודם כל לזכור כי

$$\left|\frac{3+x}{2}\right|=\frac{|3+x|}{|2|}=\frac{|3+x|}{2}$$

ואז נכפול ב־2 את שני האגפים ונקבל:

$$|3+x|>\frac{14}{3}$$

ולפי השיטה: $3+x>\frac{14}{3}$ או $3+x<-\frac{14}{3}$. הפתרון של אי־השוויון הראשון הוא $x>\frac{5}{3}$ ושל השני הוא $x<-\frac{23}{3}$. לכן הפתרון הכללי הוא $x>\frac{5}{3}$ או $x<-\frac{23}{3}$.

(ו) הפתרון הנו $\mathbb{R}$, מאחר שאגף שמאל הנו תמיד חיובי.

(ז) הפתרון הנו $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, מאחר שאגף שמאל הנו תמיד אי־שלילי, אך הוא מתאפס כאשר $x=0$.

(ט) **(דרך ראשונה)** לפי השיטה שלנו. הנקודות ה"בעייתיות" הן -1 ו־-2, ולכן נחלק את הקטע לשלושה קטעים שונים: קטע (א) שיהיה $(-\infty,-2)$, קטע (ב) שיהיה $[-2,-1]$ וקטע (ג) שיהיה $(-1,\infty)$. בקטע (א) נקבל ששני ה"פנימים" של הערכים המוחלטים שליליים (אפשר לוודא זאת על־ידי הצבה של מספר, למשל -3), ולכן שניהם צריכים לקבל סימן מינוס כשאנו מסירים את הערך המוחלט, ולכן אי־השוויון הוא:

$$\begin{aligned}-(x+1)+(-(x+2)) &< 3\\ -x-1-x-2 &< 3\\ -2x &< 6\\ x &> -3\end{aligned}$$

אבל ה"וגם" של קטע (א) ($(-\infty,-2)$) והפתרון שלו ($x>-3$) הוא הקטע $(-3,-2)$, וזה הפתרון של חלק (א). נמשיך לקטע (ב): בקטע (ב) נקבל שהערך המוחלט הראשון הוא עדיין "שלילי" אבל השני עכשיו הוא חיובי (ניתן לוודא זאת על־ידי הצבה של מספר, למשל -1.5). לכן נשים מינוס לפני הראשון ופלוס לפני השני. נקבל:

$$\begin{aligned}-(x+1)+(x+2) &< 3\\ -x-1+x+2 &< 3\\ 1 &< 3\end{aligned}$$

ולכן התשובה היא "כל הפתרונות", ואם נעשה "וגם" עם הקטע ($[-2,1]$) נקבל פשוט את הקטע עצמו. כלומר, הפתרון של חלק (ב) הוא פשוט $[-2,1]$. נמשיך לקטע (ג): בקטע (ג) נקבל ששני הערכים המוחלטים הם חיוביים, ולכן לא נשים מינוסים. נקבל:

$$\begin{aligned}(x+1)+(x+2) &< 3\\ 2x &< 0\\ x &< 0\end{aligned}$$

וה"וגם" של קטע (ג) ($(-1,\infty)$) והפתרון שלו ($x<0$) הוא הקטע $(-1,0)$.

התשובה הסופית, לכן, היא $(-3,2)$ או $[-2,-1]$ או $(-1,0)$, ואפשר לראות שכל זה ביחד מהווה בעצם את הקטע $(-3,0)$.

(ט) (דרך שנייה) ה"משמעות" של אי־השוויון היא "כל המספרים שהמרחק שלהם מ־-2 ועוד המרחק שלהם מ־-1 קטן מ־3. אפשר להביט בציר המספרים ולראות שמדובר בדיוק בכל המספרים בין -3 ל־0 (לא כולל הקצוות).

(יא) זכרו כי $|x-y|=|y-x|$ לכל x,y. לכן, אפשר לחסר ב־$|x-3|$ את שני האגפים, ולקבל $0>0$, כלומר סתירה. מכאן נובע כי אין לאי־השוויון הנ"ל פתרונות.

3. פתרו את אי־השוויונות הבאים. אם התשובה היא קטע, רשמו אותה ככזו.

(א) $\frac{x-1}{x-2}>0$ **(ב)** $\frac{x-2}{2x-5}\geq 0$ **(ג)** $\frac{2-3x}{3x-2}\geq -1$

(ד) $\frac{7-x}{x-8}\geq 2$ **(ה)** $\frac{x}{|x|}>1$ **(ו)** $\frac{x^2}{|x-9|}>0$

(ז) $\frac{\frac{17}{3}-x}{x^4}<0$ **(ח)** $\frac{1+|x|}{|x|}>0$ **(ט)** $\frac{1+|x|}{|x|}>2$

(י) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\geq 0$ **(יא)** $\frac{x^2+1}{x^2-1}>0$ **(יב)** $\star$ $\frac{8x^2-\frac{1}{8}}{16x^2-2x}>0$

פתרונות חלקיים

(ד) ראשית נדאג לזה שיהיה לנו 0 באגף ימין:

$$\begin{aligned}\frac{7-x}{x-8}-2 &\geq 0\\ \frac{7-x-2(x-8)}{x-8} &\geq 0\\ \frac{23-3x}{x-8} &\geq 0\end{aligned}$$

ולכן ייתכנו שני מקרים: מקרה (א) שבו המונה אי־שלילי והמכנה חיובי, ומקרה (ב) שבו המונה אי־חיובי והמכנה שלילי. לפי מקרה (א),

$$\begin{aligned}23-3x &\geq 0\\ 3x &\leq 23\\ x &\leq \frac{23}{3}\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} x-8 &> 0 \\ x &> 8 \end{aligned}$$

והפתרון ל"וגם" הזה הוא הקבוצה הריקה. לכן מקרה (א) לא ייתכן. לפי מקרה (ב),

$$\begin{aligned} 23-3x &\leq 0 \\ 3x &\geq 23 \\ x &\geq \frac{23}{3} \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} x-8 &< 0 \\ x &< 8 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא הקטע $\left[\frac{23}{3},8\right)$. נעשה "או" בין שני המקרים ונקבל את הקטע $\left[\frac{23}{3},8\right)$.

(ו) קל מאד לראות שהמכנה תמיד חיובי והמונה חיובי לכל $x \neq 0$ – לכן השבר כולו חיובי לכל $x \neq 0$, והפתרון הוא בפשטות כל המספרים חוץ מ־0 ו־9 (שימו לב: 9 אינו פתרון, שכן הביטוי אינו מוגדר שם כלל).

(ח) למעט המקרה $x=0$, שבו הביטוי אינו מוגדר, המונה והמכנה שניהם חיוביים תמיד. לכן התשובה הנה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(יא) המקרים שלנו כאן הם "מונה חיובי ומכנה חיובי" או "מונה שלילי ומכנה שלילי". שימו לב שהמקרה השני כלל אינו יכול להתקיים, שכן המונה תמיד חיובי. לכן עלינו לשאול רק מתי מתקיים "מונה חיובי ומכנה חיובי", כלומר פשוט מתי המכנה חיובי. נבדוק:

$$x^2-1 > 0$$

לפי השיטה שלנו, פותרים את $x^2-1=0$, מגלים שהשורשים הנם ± 1, מציירים פרבולה מחייכת, ומגלים שהפתרון הנו $x<-1$ או $x>1$.

4. פתרו את אי־השוויונות הבאים. אם התשובה היא קטע, רשמו אותה ככזו.

(א) $-\frac{x-2}{3} < x(1-x)+(x-1)^2+\frac{5x}{3}$ **(ב)** $x^2-5x+6 \geq 0$ **(ג)** $|2x-3| \geq x+3$

(ד) $\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 < \frac{x-4}{8}$ **(ה)** $\frac{x^2-4}{x^2-3x} \leq 0$ **(ו)** $\star$ $\left|x^2-3x-5\right| \leq 5$

(ז) $-2 \leq \frac{2x-1}{x-1} \leq 1$ **(ח)** $\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \geq 3$ **(ט)** $\star$ $\frac{\left|x^2-3x\right|}{x^2-|3x|} \leq 5$

פתרונות חלקיים

(א) נפשט את אגף ימין ונקבל:

$$\begin{aligned} x(1-x)+(x-1)^2+\frac{5x}{3} &= x-x^2+x^2-2x+1+\frac{5x}{3} \\ &= \frac{5x}{3}-x+1=\frac{2x+3}{3} \end{aligned}$$

כלומר, עלינו לפתור את

$$-\frac{x-2}{3}<\frac{2x+3}{3}$$

נכפול ב־3 ונקבל

$$\begin{aligned} 2-x &< 2x+3 \\ -1 &< 3x \end{aligned}$$

ולכן $x>-\frac{1}{3}$.

(ב) על־פי השיטה שלנו, פותרים את המשוואה $x^2-5x+6=0$, שהיא בעצם המשוואה $(x-2)(x-3)=0$, ופתרונותיה הם $2,3$. מציירים פרבולה מחייכת ומסיקים שהפתרון הנו $x\le 2$ או $x\ge 3$.

(ג) למרות המשתנה באגף ימין, אותה השיטה עובדת: נקבל $2x-3\ge x+3$ או $2x-3\le -(x+3)$. האי־שוויון הראשון נותן $x\ge 6$ והשני נותן $x\le 0$. לכן הפתרון הנו $x\ge 6$ או $x\le 0$.

(ח) נזכר כי

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right|=\frac{|x-3|}{|x+1|}$$

וכי מותר לכפול אי־שוויון במספר חיובי. לכן נקבל:

$$|x-3|\ge 3\,|x+1|$$

מכאן ואילך נפתור שוב בשיטה של שני ערכים מוחלטים. הנקודות ה"בעייתיות" הן -1 ו־3, ולכן נחלק את העולם לשלושה קטעים: קטע (א) יהיה $(-\infty,-1)$, קטע (ב) יהיה $[-1,3]$ וקטע (ג) יהיה $(3,\infty)$. פותרים את התרגיל בכל אחד מן הקטעים, עושים "וגם" עם הקטע, ו"או" בין כל התוצאות הסופיות.

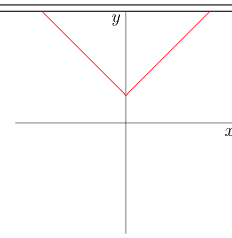
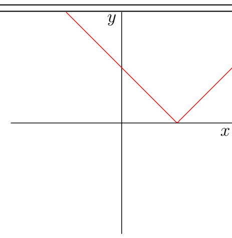
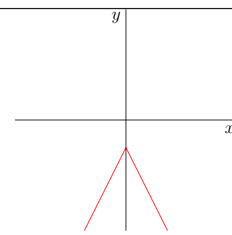
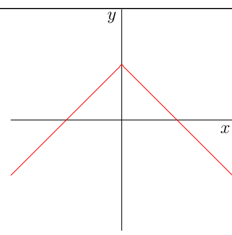
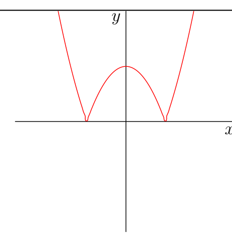
שרטוט

נסו להתאים את הגרפים לפונקציות המתאימות להם. לכל גרף מתאימה אך ורק פונקציה אחת.

פונקציות אפשריות:

$$|x|+1, \ \ \left|x^2-2\right|, \ \ |2-x|, \ \ -|x|+2, \ \ -|2x|-1$$

גרפים:

גרף	פונקציה	גרף	פונקציה
	$\|x\|+1$		$\|2-x\|$
	$-\|2x\|-1$		$-\|x\|+2$
	$\left\|x^2-2\right\|$		