תרגיל 7 – פונקציות טריגונומטריות – הערות

1. פתרו את המשוואות הבאות. לא מספיק למצוא פתרון אחד – יש למצוא את כולם!

(א) $\sin x = \frac{1}{2}$ **(ב)** $\cos x = \frac{1}{2}$ **(ג)** $\tan x = 1$ **(ד)** $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$

(ה) $\sin x = \tan x$ **(ו)** $\sin(2x) + \sin x = 0$ **(ז)** $4\sin x\cos x = \sqrt{3}$ **(ח)** $\cos x = \sin\frac{x}{2}$

(ט) $\sin^2 x - 1 = 0$ **(י)** $\cos x = \frac{1}{\tan x}$ **(יא)** $\tan^2 x - 1 = 0$ **(יב)** $\cos(2x) = 2\cos x\sin x$

(יג) $\cos^2 x - 1 = 0$ **(יד)** $\sin^2 x = 2\sin x - 1$ **(טו)** $\sin x = \cos\frac{x}{2}$ **(טז)** $\cos(\pi + x) = \sin(\pi - x)$

פתרונות

(א) הפתרון הראשי הוא $x = \frac{\pi}{6}$. לפי מעגל היחידה, או לפי הזהויות הבסיסיות, קיים פתרון נוסף ב־$\pi - \frac{\pi}{6}$, ולכל זה יש להוסיף $2\pi k$. מסקנה: משפחת הפתרונות היא

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{or} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

(ב) הפתרון הראשי הוא $x = \frac{\pi}{3}$. לפי מעגל היחידה, או לפי הזהויות הבסיסיות, קיים פתרון נוסף ב־$-\frac{\pi}{3}$, ולכל זה יש להוסיף $2\pi k$. מסקנה: משפחת הפתרונות היא

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{or} \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

(ג) **דרך ראשונה** – מתקיים:

$$\begin{aligned} \tan x &= 1 \\ \frac{\sin x}{\cos x} &= 1 \\ \sin x &= \cos x \end{aligned}$$

לפי מעגל היחידה, מתי $\sin x = \cos x$? בדיוק בשני מקומות: ב־$\frac{\pi}{4}$ וב־$\frac{5\pi}{4}$. מדובר בקפיצה של π בין שני הפתרונות, ולכן הפתרון הכללי הוא $\frac{\pi}{4} + \pi k$.
דרך שנייה – הפונקציה $\tan x$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור π, ובכל מחזור היא מונוטונית. לכן מספיק למצוא פתרון אחד ל־$\tan x = 1$ (וכזה אפשר למצוא מטבלאות הפתרונות שיש לכם במחברת – $\frac{\pi}{4}$) ולהוסיף πk, בשביל לקבל את הפתרון הכללי: $\frac{\pi}{4} + \pi k$.

(ד) לפי זהות אלמנטרית:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

ולכן המשוואה יכולה להיתרגם ל־

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

ואת זה כבר פתרנו.

(ה) נקבל:

$$\begin{aligned}\sin x &= \tan x\\ \sin x &= \frac{\sin x}{\cos x}\end{aligned}$$

עכשיו נרצה לחלק ב־$\sin x$, אבל אולי $\sin x=0$? לכן נפצל לשני מקרים:

מקרה א $\sin x=0$. זה קורה כאשר $x=\pi k$. במקרה זה נקבל $0=\frac{0}{\cos 0}$ וזו משוואה נכונה, ולכן πk פותר את המשוואה.

מקרה ב $\sin x\neq 0$. נחלק בו ונקבל

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\cos x}\\ \cos x &= 1\end{aligned}$$

ולכן $x=2\pi k$ ולכן $\sin x=0$ בסתירה להנחתנו. לכן איננו מקבלים פתרונות נוספים במקרה זה.

לסיכום נקבל שהפתרון הכללי הוא πk.

(ו) לפי נוסחה לסינוס של זווית כפולה נקבל:

$$\begin{aligned}2\sin x\cos x+\sin x &= 0\\ \sin x\,(2\cos x+1) &= 0\end{aligned}$$

לכן, או ש־$\sin x=0$ או ש־$2\cos x+1=0$. אם $\sin x=0$ אז $x=\pi k$, ולכן πk פותר את המשוואה. אם $2\cos x+1=0$ אז $\cos x=-\frac{1}{2}$. לפי מעגל היחידה או בעזרת זהויות אלמנטריות נקבל

$$\cos x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \quad \text{or} \quad \cos x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$$

לכן הפתרון הכללי הוא πk או $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ או $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. אפשר לרשום את זה קצת יותר קצר, אבל זה לא חשוב.

(ז) פותרים לפי סינוס של זווית כפולה.

(ח) ⋆ ־ שאלה זו הייתה אמורה להיות כוכבית. אתן רמז למעוניינים לנסות ולפתור אותה ־ במקום לחשוב על סינוס של חצי זווית, אפשר לחשוב על קוסינוס של זווית כפולה (לדמיין שהמשתנה שלנו הוא בעצם $\frac{x}{2}$, ולא x). נקבל:

$$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} \quad = \quad \sin\frac{x}{2}$$

עתה אפשר להשתמש במשפט פיתגורס כדי שיופיעו רק סינוסים, ואז אפשר לחשוב על $\sin\frac{x}{2}$ כעל "y", ולקבל משוואה ריבועית בעלת שני שורשים. מכאן אפשר להמשיך ולפתור ולקבל מספר משפחות פתרונות.

(ט) מתקיים $\sin^2 x = 1$, ולכן $\sin x = \pm 1$ (לא לשכוח את המינוס!). כלומר, $\sin x = 1$ **או** $\sin x = -1$. פותרים כל אחד מאלה בנפרד, ועושים "או".

(י) נקבל:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{\tan x}\\ \cos x &= \frac{\cos x}{\sin x}\end{aligned}$$

כמו בסעיף ה', נרצה לחלק ב־$\cos x$, אך אולי הוא אפס? נפתור זאת בדרך מעט שונה: נעביר אגפים ונוציא את $\cos x$ כגורם משותף:

$$\cos x\left(1-\frac{1}{\sin x}\right)=0$$

ולכן $\cos x = 0$ או $1-\frac{1}{\sin x}=0$. במקרה הראשון נקבל $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (למשל, לפי מעגל היחידה). במקרה השני נקבל

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\sin x}\\ \sin x &= 1\end{aligned}$$

ולכן $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. נעשה "או" בין הפתרונות ונקבל $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

(יא) נקבל $\tan^2 x = 1$ ולכן $\tan x = \pm 1$ (לא לשכוח את המינוס!). כלומר, $\tan x = 1$ **או** $\tan x = -1$. את המשוואה הראשונה פתרתם בסעיף ג'. את המשוואה השנייה פותרים באופן דומה, ובסוף עושים "או" בין הפתרונות.

(יב) לפי נוסחה לסינוס זווית כפולה נקבל $\cos(2x)=\sin(2x)$. חושבים על ה־"$2x$" כמשתנה, ולפי התרגיל $\cos x = \sin x$ (ראו בסעיף ג') נקבל

$$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k$$

ולכן

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$$

(יג) בדומה לסעיף ט'.

(יד) שימו לב לפתרון מעט מחוכם: נעביר אגפים ונקבל

$$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

עתה, צורה זו מזכירה $a^2 - 2a + 1$. נראה מוכר? כפל מקוצר! נקבל:

$$(\sin x - 1)^2 = 0$$

ולכן $\sin x - 1 = 0$, כלומר $\sin x = 1$, והתשובה תהיה $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

(טו) נחשוב על x כעל $\frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ ונקבל:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}$$

נעביר אגפים ונוציא גורם משותף ונקבל:

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

ולכן או ש־$\cos\frac{x}{2} = 0$, או ש־$2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$. במקרה הראשון נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x &= \pi + 2\pi k \end{aligned}$$

במקרה השני נקבל:

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2} &= 1 \\ \sin\frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולפי סעיף א' נקבל:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{or} \quad \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

כלומר

$$x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k \quad \text{or} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k$$

נוסיף את $\pi + 2\pi k$ ונקבל את כל הפתרונות.

(טז) נזכר כי $\cos(\pi + x) = -\cos x$ וכי $\sin(\pi - x) = \sin x$ ונקבל

$$-\cos x = \sin x$$

כלומר $\tan x = -1$, ואת זה פתרתם בסעיף י"א.

2. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

(א) $2x - 3\sin x$ **(ב)** $\frac{1}{1-\cos x}$ **(ג)** $\frac{1+\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ **(ד)** $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

פתרונות

(א) $\mathbb{R}$.

(ב) הפונקציה מוגדרת כאשר $\cos x \neq 1$, כלומר כאשר $x \neq 2\pi k$.

(ג) בפונקציה זו שווה לרשום $\cos^2 x$ במקום $1-\sin^2 x$. נקבל שתחום ההגדרה הוא כל ה־x־ים עבורם $\cos^2 x > 0$, כלומר $\cos x \neq 0$, כלומר $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

(ד) פונקציה זו מוגדרת כאשר $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. נעביר אגפים ונקבל $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$.

3. נגדיר פונקציה חדשה, $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של $\cot(x)$?

פתרון הפונקציה מוגדרת כאשר $\sin x \neq 0$, כלומר כאשר $x \neq \pi k$.

(ב) הוכיחו כי $\cot x$ הנה מחזורית עם מחזור π.

פתרון מתקיים

$$\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ולכן הפונקציה $\cot x$ מחזורית עם מחזור π.

4. הוכיחו כי הפונקציה הבאה חסומה: $f(x) = 3 + 4\sin(2x)$

היא חסומה מלמעלה על ידי 7 ומלמטה על ידי -1. מדוע?

5. מהי התמונה של הפונקציה $3\sin(2x-1)$?

נשים לב כי $2x-1$ יכול להיות כל מספר, ולכן $\sin(2x-1)$ יכול לקבל כל ערך בין -1 ל־1. לכן $3\sin(2x-1)$ יכול לקבל כל ערך בין -3 ל־3. כלומר: התמונה היא $[-3,3]$.

6. $\star$ מצאו את התמונה של הפונקציה $\sin x + \cos x$.

אין לנו (עדיין!) דרך פורמלית טובה לפתור את התרגיל הנ"ל, אך התבוננות מעמיקה במעגל היחידה מגלה לנו שהמקסימום של הפונקציה הזו יתקבל כאשר $\sin x = \cos x$ ושניהם חיוביים. כלומר, כאשר $x = \frac{\pi}{4}$. ערך הפונקציה בנקודה הזו יהיה בדיוק $\sqrt{2}$. באופן דומה, המינימום של הפונקציה יתקבל כאשר $\sin x = \cos x$ ושניהם שליליים. כלומר, כאשר $x = \frac{5\pi}{4}$. ערך הפונקציה בנקודה זו יהיה בדיוק $-\sqrt{2}$. התמונה תהיה, לכן, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

7. עבור כל אחת מבין הפונקציות הבאות, החליטו האם היא זוגית או לא, והאם היא אי־זוגית או לא:

(א) $\sin(\sin x)$ **(ב)** $\cos(\sin x)$ **(ג)** $\cos(\cos x)$ **(ד)** $\sin(\cos x)$ **(ה)** $x \sin x$

פתרונות כל התרגילים בסעיף זה נפתרים באותו האופן. נפתור לדוגמה שלושה סעיפים.

(ב) מתקיים

$$\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$$

ולכן הפונקציה הזו זוגית.

(ד) מתקיים

$$\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x)$$

ולכן הפונקציה הזו זוגית.

(ה) מתקיים

$$(-x)\sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \sin x$$

ולכן הפונקציה הזו זוגית.

8. נסו לפתח את הזהויות הטריגונומטריות עבור סינוס של הפרש זוויות, עבור סינוס של חצי זווית, ועבור סינוס של זווית משולשת. כלומר, הוכיחו כי

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad (\text{for } x \in [0, 2\pi]) \\ \sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

הזהות הראשונה קלילה. הזהות השנייה מפותחת באופן דומה מאד למה שעשינו בכיתה עם $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. בזהות השלישית אפשר לחשוב על $\sin(3x)$ כעל $\sin(x+2x)$ ולהשתמש מספר פעמים בנוסחאות לגבי סכום זוויות ובמשפט פיתגורס. נעשה זאת:

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(x+2x) \\ &= \sin x \cos(2x) + \sin(2x)\cos x \\ &= \sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2\sin x \cos^2 x \\ &= \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 2\sin x\left(1-\sin^2 x\right) \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

9. נגדיר $f(x)=\sin(x+0.9)+1.1$.

(א) כמה נקודות חיתוך יש לגרף של f עם ציר ה־x?

תשובה מכיוון שהסינוס לא מקבל ערך קטן מ־-1, הפונקציה אינה נחתכת עם ציר ה־x לעולם.

(ב) כמה נקודות חיתוך יש לגרף של f עם ציר ה־y?

תשובה אחת בדיוק! זו שעבורה $x=0$.

(ג) מהו תחום ההגדרה של f?

תשובה $\mathbb{R}$.

(ד) מהי התמונה של f?

תשובה פתרנו שאלה כזו ממש בתרגיל זה: $\text{Im}f=[0.1,2.1]$.

(ה) האם f מחזורית?

תשובה כן, יש לה מחזור 2π. נוכיח:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi+0.9)+1.1 \\ &= \sin((x+0.9)+2\pi)+1.1 \\ &= \sin(x+0.9)+1.1=f(x) \end{aligned}$$

(ו) האם f זוגית? האם היא אי־זוגית?

תשובה לא ולא. ניסיונות להוכיח זאת הסתיימו בכישלון, ולכן חיפשתי דוגמה נגדית פשוטה ככל האפשר:

$$\begin{aligned} f(-0.9) &= \sin(-0.9+0.9)+1.1=\sin 0+1.1=1.1 \\ f(0.9) &= \sin(0.9+0.9)+1.1>1.1 \end{aligned}$$

ולכן היא אינה זוגית ואינה אי זוגית.

(ז) האם f מונוטונית?

תשובה לא. ראינו שפונקציה מחזורית שאינה קבועה אינה מונוטונית.

(ח) האם f חד־חד־ערכית?

תשובה לא. פונקציה מחזורית לעולם אינה חד חד ערכית.

10. נסו לצייר סקיצה (כללית מאד) של הפונקציה $\cot x$ שהוגדרה קודם לכן.

להלן: