

סמסטר קיץ 2011
מועד ב', 4/10/2011
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 9 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- יש לנמק את התשובות. תשובה שאינה מנומקת כראוי עלולה ליזכות בניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ על-פי הסעיפים הבאים:

- (א) מצא/י את תחום ההגדרה
- (ב) מצא/י את תחומי הרציפות
- (ג) קבע/י האם f זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה
- (ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים
- (ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי
- (ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול
- (ז) מצא/י את האסימפטוטת האנכיות והמשופעות
- (ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה
- (ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f , והאם היא חד-חד-ערכית

שאלה 2 (20 נק')

נגדיר $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{|x|+1}\right)$.

- (א) מהו תחום ההגדרה של f ?
- (ב) האם f זוגית? האם היא אי-זוגית? נמק/י את תשובתך!
- (ג) האם f מונוטונית על החיוביים? אם כן – עולה או יורדת?
- (ד) האם f מחזורית? נמק/י את תשובתך!
- (ה) מהי התמונה של f ?
- (ו) כמה נקודות חיתוך יש לגרף של f עם ציר ה- x ?
- (ז) כמה נקודות חיתוך יש לגרף של f עם ציר ה- y ?

שאלה 3 (8 נק')

חשב/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \sin(x^{-1}) \cdot (\sin x)^{-1} \right)$$

שאלה 4 (10 נק')

נגדיר $f(x) = x \left(\arctan x - \frac{\pi}{4} \right)$. מצא/י את האסימפטוטות המשופעות של f ב- ∞ וב- $(-\infty)$, או קבע/י כי אלה אינן קיימות.

שאלה 5 (9 נק')

הוכיח/י הוכח כי לכל x חיובי מתקיים $(1+x)^{410} > 1 + 410x$.

שאלה 6 (12 נק')

תהי $f(x)$ רציפה ב- $[0, \infty)$ וגזירה על החיוביים, ונניח כי $f'(x)$ עולה ממש בקרן $(0, \infty)$. הוכיח/י הוכח כי לכל x חיובי מתקיים

$$f(2x) - f(x) > f(x) - f(0)$$

שאלה 7 (18 נק')

נתון מלבן R במישור, שאחד מקודקודיו נמצא בראשית הצירים, אחד מקודקודיו בנקודה $(a, 0)$ ($0 < a < 4$), קודקוד שלישי על ציר ה- y וקודקודו האחרון על הישר $g(x) = 8 - 2x$.

(א) מצא/י, אם אכן קיים, a עבורו שטח המלבן R מקסימלי.

(ב) מצא/י, אם אכן קיים, a עבורו שטח המלבן R מינימלי.

שאלה 8 (8 נק')

תהי $f(x)$ פונקציה, ונתון כי $f(\pi) = 0$. כמו כן, לכל $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{\cos x}$. מצא/י את הישר המשיק ל- f בנק' $x = \pi$.

שאלה 9 (10 נק')

תהי $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה עולה ממש, ונתון כי $f(0) = -5$, $f(1) = -1$.

(א) תהי $g(x) = f(x) + 2$. כמה שורשים בדיוק יש למשוואה $g(x) = 0$?

(ב) תהי $h(x) = (f(x))^2 - 2$. כמה שורשים בדיוק יש למשוואה $h(x) = 0$?