

סמסטר קיץ 2012  
מועד א', 2/9/2012  
משך הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

## בחינה בקורס

# מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

### הנחיות

- בבחינה זו 10 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 120.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- רצוי לנמק את התשובות. במקומות בהם רשום במפורש לנמק, יש לעשות זאת.

בהצלחה!

**שאלה 1 (25 נק')**

חקור/חקרי את הפונקציה  $f(x) = \arctan(e^x)$  על-פי הסעיפים הבאים:

(א) מצא/י את תחום ההגדרה

(ב) מצא/י את תחומי הרציפות

(ג) קבע/י האם  $f$  זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה

(ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים

(ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי

(ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול

(ז) מצא/י את האסימפטוטות האנכיות והמשופעות

(ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה

(ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת  $f$ , והאם היא חד-חד-ערכית

**שאלה 2 (6 נק')**

היה  $f_1(x)$  ו- $f_2(x)$  פונקציות, ונניח כי  $g_1(x) = 7x - 2$  הנה אסימפטוטה של  $f_1(x)$  ב- $\infty$ , וגם כי  $g_2(x) = 3x + 4$  הנה אסימפטוטה של  $f_2(x)$  ב- $\infty$ . מצא/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

**שאלה 3 (4 נק')**

מצא/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e^{e^x})$$

**שאלה 4 (7 נק')**

מצא/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \arctan x}{\pi} \right)^{\pi x}$$

**שאלה 5 (7 נק')**

נניח שאוכלוסיה מסוימת גדלה בקצב של 3% לנפש; כלומר, אם  $N(t)$  מסמן את גודל האוכלוסיה בזמן  $t$ , אז  $\frac{N'(t)}{N(t)} = 0.03$ . נניח כי בזמן  $t = 4$  האוכלוסיה מונה מיליון איש. מצא/י, בעזרת קירוב לינארי, קירוב לגודל האוכלוסיה בזמן  $t = 4.01$ .

**שאלה 6 (12 נק')**

הוכיחי/הוכח כי לכל  $x > 0$  מתקיים

$$\cos x > 1 - x$$

**שאלה 7 (19 נק')**

בונים מלבן ברביע הראשון כך שקודקוד אחד שלו נמצא בראשית, שני קודקודים נוספים שלו נמצאים על הצירים, והקודקוד הרביעי נמצא על גרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$ .

(א) מצא/י את ממדי המלבן בעל השטח הגדול ביותר האפשרי.

(ב) נסמן ב- $s(x)$  את שטח המלבן כאשר הקודקוד שנמצא על ציר ה- $x$  נמצא בנקודה  $(x, 0)$ . מצא/י את הגבולות הבאים, או קבע/י שאינם קיימים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) \quad (\text{א})$$

**שאלה 8 (8 נק')**

מצא/י את הנקודות בהן הפונקציה הבאה אינה גזירה (או קבע/י כי אין כאלה):

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}}$$

**שאלה 9 (12 נק')**

תהי  $f(x)$  פונקציה עולה ממש ורציפה על כל הישר הממשי, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  וגם  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

(א) הוכח/הוכיחי כי  $f$  הפיכה.

(ב) הוכח/הוכיחי כי תחום ההגדרה של  $f^{-1}$  הנו  $\mathbb{R}$ .

(ג) הוכח/הוכיחי כי  $f^{-1}$  עולה ממש.

**שאלה 10 (20 נק')**

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} - e\sqrt{x}$$

(א) הוכיחי/הוכח כי ל- $f$  יש אפס אחד בלבד בקטע  $[0, \infty)$ , ומצא/י אותו.

(ב) תהי  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  הפונקציה הקדומה של  $f$  המקיימת  $F(0) = 0$ . מצא/י את תחומי העלייה והירידה של  $F(x)$ , את נקודות הקיצון שלה, את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול שלה.