

סמסטר קיץ 2015

מועד ב', 8.9.2015

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 3 דפי נוסחאות ומחשבון מדעי לא גרפי

בחינה בקורס

מתמטיקה (למדעי החיים ולרפואה)

מרצה: פלג מיכאלי

הנחיות

- בבחינה זו 8 שאלות. משקל כל שאלה רשום בצידה. סה"כ נקודות שניתן לצבור במבחן: 118.
- יש לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו המינימום בין 100 לסך הנקודות שנצברו בבחינה.
- רצוי לנמק את התשובות. במקומות בהם רשום במפורש לנמק, יש לעשות זאת.
- שימו לב כי בבחינה זו 3 עמודים, כולל עמוד זה.

בהצלחה!

שאלה 1 (30 נק')

חקור/חקרי את הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - x}$ על-פי הסעיפים הבאים:

(א) מצא/י את תחום ההגדרה

(ב) מצא/י את תחומי הרציפות

(ג) קבע/י האם f זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מאלה

(ד) מצא/י את נקודות החיתוך עם הצירים

(ה) מצא/י את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון המקומי

(ו) מצא/י את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול

(ז) מצא/י את האסימפטוטות האנכיות והמשופעות

(ח) שרטט/י את גרף הפונקציה. שים/י לב: השרטוט צריך להיות תואם ליתר התוצאות בשאלה

(ט) בעזרת השרטוט, קבע/י מהי תמונת f , והאם היא חד-חד-ערכית

שאלה 2 (8 נק')

נתונות ארבע פונקציות f, g, h, k עבורן מתקיים:

• f הנה חסומה, והגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ אינו קיים,

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \infty$

חשבו/י את הגבול הבא (או קבע/י שאינו קיים):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x) \cdot k(x)}$$

שאלה 3 (10 נק')

חשבו/י את הגבולות הבאים (או קבע/י שאינם קיימים):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2015}}{x - 2015} \quad (\text{ב})$$

שאלה 4 (12 נק')

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח כי $g(x) = 2x + 3$ הנה אסימפטוטה של $f(x)$ ב- ∞ , וכי $h(x) = 4 + 5x$ הנה אסימפטוטה של $f(x)$ ב- $-\infty$. הוכיחו/הוכיחו כי קיימת c עבורה $f(c) = 0$.

שאלה 5 (15 נק')

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים על כל הישר הממשי. נניח כי $f(0) = 0$ וכי $f'(0) = 3$. כמו כן, נניח כי הפיכה.

(א) נגדיר $g(x) = xf(x)$. חשבי את $g'(0)$ ואת $g''(0)$.

(ב) נגדיר $h = f \circ f$. חשבי את $h'(0)$.

(ג) נגדיר $k = f^{-1}$. חשבי את $k'(0)$.

שאלה 6 (15 נק')

נגדיר $f(x) = \arctan(x^2 - 1)$.

(א) האם יש ל- $f(x)$ מקסימום גלובלי? האם יש לה מינימום גלובלי? אם כן – מצאי אותם.

(ב) האם $f(x)$ חסומה?

(ג) מהי התמונה של $f(x)$?

שאלה 7 (12 נק')

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מחזורית עם מחזור π , ונניח כי F הנה פונקציה קדומה כלשהי של f . נניח גם כי ל- F יש נקודת מינימום מקומית ב- π .

(א) הוכיחי/הוכח כי $f(0) = 0$.

(ב) כמה נקודות חיתוך יש ל- f עם ציר ה- x ? כמה נקודות חיתוך יש לה עם ציר ה- y ?

(ג) האם F בהכרח מחזורית? אם כן, הסבר/הסבירי מדוע. אם לא, מצאי דוגמה ל- f ול- F מתאימות כך ש- F אינה מחזורית.

שאלה 8 (16 נק')

נתונה פונקציה $f(x)$, זוגית, חסומה וגזירה. נגדיר $g(x) = f(x) + 2015$ ו- $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(א) האם $g(x)$ בהכרח זוגית? אם כן, הסבר/הסבירי מדוע. אם לא, מצאי דוגמה ל- $f(x)$ שעבורה $g(x)$ אינה זוגית.

(ב) האם $g(x)$ בהכרח חסומה? אם כן, הסבר/הסבירי מדוע. אם לא, מצאי דוגמה ל- $f(x)$ שעבורה $g(x)$ אינה חסומה.

(ג) האם $h(x)$ בהכרח חסומה? אם כן, הסבר/הסבירי מדוע. אם לא, מצאי דוגמה ל- $f(x)$ שעבורה $h(x)$ אינה חסומה.

(ד) האם $h(x)$ בהכרח גזירה? אם כן, הסבר/הסבירי מדוע. אם לא, מצאי דוגמה ל- $f(x)$ שעבורה $h(x)$ אינה גזירה.